

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 5 Giugno 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r : 3x_0 - x_1 + 2x_2 = 0 \qquad t : x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A = [1, -1, 0] \quad B = [-1, 1, 2], \quad D[0, 0, 1].$$

Stabilire se esiste una proiettività $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = t, \quad f(t) = r, \quad f(D) = D, \quad f(B) = A, \quad f(A) = B.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale proiettività e stabilire se essa è unica.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{A} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio affine reale 3-dimensionale \mathbb{A} in cui è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y, z) . Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la quadrica \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: k^2x^2 + y^2 + (1 - k)z^2 - 2xy - 2k^2x + 2y = 0.$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica \mathcal{Q} è un cilindro di vertice $P_\infty[0, 1, 1, 0]$ e dire di che tipo di cilindro si tratta.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) . Si consideri la curva algebrica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C}: x^3 + 6x^2 + y^2 = 0.$$

- (a) Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- (b) Si tracci un grafico approssimativo del supporto di $\mathcal{C}: x^3 + 6x^2 + y^2 = 0$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dove è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) .