

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 10 Luglio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{12}{5}\}$ e si consideri la proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1, 2]) = [-5k - 12, 4k + 4], \quad f([3, 0]) = [0, 12], \quad f([-1, 1]) = [5k + 12, 8 - 4k].$$

- (1) Determinare esplicitamente una tale proiettività.
- (2) Si determini per quali valori di k , la trasformazione f ammette punti uniti e classificarla.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio euclideo 3-dimensionale \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano con coordinate (x, y, z) . Si consideri la quadrica affine \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: x^2 - 2y^2 + z^2 - 6xz - 4 = 0.$$

Classificare \mathcal{Q} e determinarne centro e piani principali.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) . Si consideri la curva algebrica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C}: y^3 = (x + 2)^2.$$

- (a) Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- (b) Si tracci un grafico approssimativo del supporto di \mathcal{C} .