PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 9 Luglio 2024
Traccia: A

Esercizio 1. Consideriamo 9 Francesi, 8 Americani e 8 Cinesi. I Cinesi sono tutte Donne, tra gli Americani ci sono 3 Donne e tra i Francesi ci sono 6 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 8 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 2. Determinare se le seguenti funzioni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, y \in \mathbb{R} \qquad f(y) = 5 - 5y^5$$

e

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, t \in \mathbb{N} \qquad g(t) = -\frac{3}{2} - 3t$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ f$ e $f \circ g$ e le funzioni inverse g^{-1} e f^{-1}.

Esercizio 3. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 18x \equiv 15 \pmod{21} \\ 8x \equiv 16 \pmod{24} \\ 13x \equiv 23 \pmod{4}. \end{cases}$$

Risolvere se possibile il sistema, determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$6 \mid 7^n + 5.$$

Esercizio 5. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elemento h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è pari o dispari.
(3) Descrivere esplicitamente l'inverso di h.
(4) Stabilire l'ordine di h nel gruppo S_9.
(5) Descrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 6. Siano $a, b, c, \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $c \mid a$ e $c \mid b$ allora per ogni $x, y, \in \mathbb{Z}$ si ha che $c \mid xa + yb$.