

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica, A-L
Bari, 27 Febbraio 2025

Traccia: 1

Esercizio 1. Determinare se le seguenti funzioni

$$h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \quad h(a) = \frac{6}{5}a - \frac{1}{3}$$

e

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}y^2$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $h \circ f$ e $f \circ h$ e le funzioni inverse h^{-1} e f^{-1} .

Esercizio 2. Stabilire con una dimostrazione se le seguenti congruenze sono vere o false:

$$15^{12} \equiv 1 \pmod{13} \quad 2^{24} \equiv 7 \pmod{45}.$$

Esercizio 3. Siano $a, b, c, \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $c \mid a$ e $c \mid b$ allora per ogni $x, y, \in \mathbb{Z}$ si ha che $c \mid xa + yb$.

Esercizio 4. Si consideri sull'insieme \mathbb{Q} la seguente operazione $*$: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, tale che

$$\forall t, c \in \mathbb{Q} \quad t * c = 3tc + t + c.$$

- (1) Determinare se l'operazione è associativa.
- (2) Determinare se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Q}, *)$.
- (4) Descrivere, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 5. Consideriamo 5 Canadesi, 8 Nigeriani e 8 Spagnoli. I Canadesi sono tutti Uomini, tra i Nigeriani ci sono 3 Donne e tra gli Spagnoli ci sono 3 Uomini.

- a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 7 persone?
- b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
- c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna ?
- d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna?

Esercizio 6. Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$