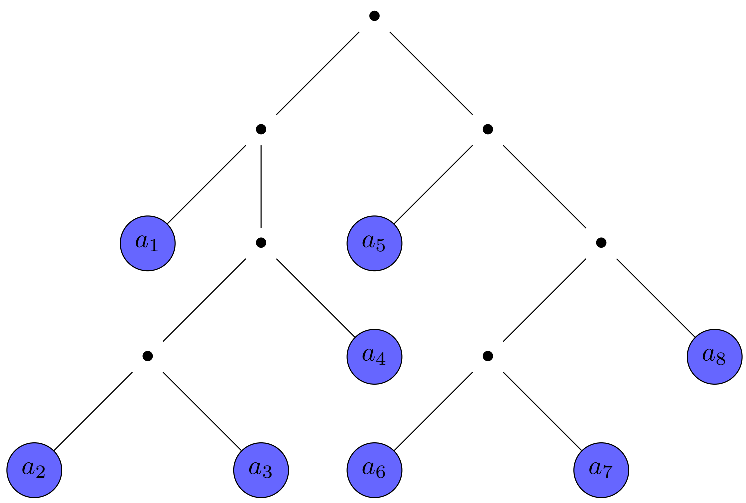
Logica mente Insieme

Donatella Iacono, Vincenzo C. Nardozza



Progetto Lauree Scientifiche (PLS)

Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"

Dipartimento di Informatica

Anno Accademico 2022/23

Introduzione

Queste note sono nate con l'obiettivo di presentare alle studentesse e agli studenti, idealmente di quarto (o quinto) anno di scuola secondaria superiore, le prime nozioni di Logica e di Insiemistica che riteniamo indispensabili per poter seguire le lezioni di Matematica impartite nel primo anno dei vari corsi di Informatica.

La necessità di un tale percorso su Logica e Insiemistica nasce nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche (PLS) dei corsi di Informatica. Durante il primo anno dei corsi di laurea a carattere scientifico molti studenti sperimentano considerevoli difficoltà, principalmente nell'affrontare corsi di Matematica. L'approccio universitario alle materie scientifiche si svolge in effetti su un piano essenzialmente concettuale, che a volte risulta astratto e che quindi richiede una comprensione molto più dettagliata dei concetti coinvolti e, soprattutto, l'utilizzo del linguaggio appropriato. A volte, purtroppo, anche il solo passaggio al linguaggio formale risulta nuovo e inusuale, e per questo viene visto (erroneamente) come complicato o astruso.

Nelle seguenti pagine abbiamo raccolto alcuni aspetti di base di Logica e di Insiemistica, seguendo un approccio teorico ma utilizzando un linguaggio solo parzialmente formale, al fine di introdurre in modo graduale i nuovi argomenti. I concetti proposti sono accompagnati da un considerevole numero di esercizi svolti, alcuni basati sulle conoscenze di Matematica della scuola secondaria superiore. Nelle nostre intenzioni, questa scelta dovrebbe consentire da un lato di apprendere i nuovi concetti con chiarezza, dall'altro di aiutare a chiarire eventuali dubbi pregressi, riconoscendo argomenti già incontrati come casi particolari di un contesto più ampio e più strutturato.

In queste note, non cerchiamo di riassumere il contenuto dei corsi delle scuole secondarie superiori, nè tantomeno presentare tutti i contenuti fondamentali per un corso di laurea scientifico: non è per noi nè possibile, nè ragionevole. I necessari approfondimenti saranno esaminati nei corsi di Matematica del primo anno dei Corsi di Laurea in Informatica. La nostra idea è di cercare di introdurre alcune nozioni, con un approccio nuovo, in modo da arrivare a frequentare un Corso di Laurea in Informatica sentendosi meno spaesati, più vicini all'approccio formale dei corsi universitari e, possibilmente, più consapevoli della scelta effettuata.

Buona lettura e buon lavoro
Donatella Iacono e Vincenzo C. Nardozza

In copertina: il modo in cui un computer vede il prodotto $\Big(a_1\big((a_2a_3)a_4\big)\Big)\Big(a_5\big((a_6a_7)a_8\big)\Big)$, che è uno dei 429 significati possibili per la macchina di intendere il prodotto $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$.

Indice

Parte 1. Logica

Nel linguaggio di tutti i giorni, il termine *logico* ha un che di ambiguo, perchè i suoi contorni sono sfumati. Per esempio, la frase *era la scelta più logica* fa intendere che la scelta fatta era la più conveniente, ma non chiarisce in base a quali considerazioni: una parte delle motivazioni potrebbe consistere in fatti oggettivi (costo, durata, affidabilità,...) che compensano altri lati negativi, ma anche in valutazioni personali (per esempio, dando un maggior peso all'affidabilità e alla durata che al costo economico); d'altra parte, in altre scelte "logiche" le motivazioni possono essere non materiali, ma morali o affettive (per esempio, quando un genitore spende denaro per far studiare un figlio invece che acquistare un'auto migliore, o quando si fanno donazioni per aiutare persone bisognose, o quando ci si mette a disposizione volontariamente per aiutare chi è in difficoltà). In ciò, è più che frequente che una scelta "logica" per qualcuno risulti "illogica" per qualcun altro. Generalmente, nel linguaggio comune il termine "logico" è molto vicino al termine "ragionevole": quale sia poi il criterio di ragionevolezza, dipende dal contesto e dalla situazione particolare, oltre che dal soggetto che esercita tale ragionevolezza.

In queste note, la Logica (notare la lettera maiuscola) che vedremo riguarda solo l'ambito della Matematica, e per essere ancora più precisi riguarda solo gli aspetti di Logica Matematica che riguardano il linguaggio matematico. Questo dovrebbe suonare come un avviso per il lettore a tenere ben distinto il senso comune della parola *logico* da quel che sarà il senso dei concetti che vedremo. In effetti, il fatto che anche in Matematica siano presenti termini del linguaggio di tutti i giorni è spesso causa di iper-semplificazioni che portano a errori disastrosi o a una cattiva comprensione dei concetti matematici cui si riferiscono. Ad esempio, incontrando il termine *relazione* la mente andrà automaticamente al significato (vario e ambiguo) del linguaggio comune, mentre in Matematica quella parola ha un significato preciso e assoluto: vuol dire *sottinsieme di un prodotto cartesiano*, non altro. Lo stesso vale per tanti esempi, alcuni dei quali saranno illustrati in queste note, e tra essi, appunto, la parola *Logica* e la parola *logico*: il consiglio perciò è di focalizzare bene il senso specifico di un termine usato in Matematica, e "cancellare" (temporaneamente) gli altri significati del linguaggio comune associati a quello stesso termine.

Per completare questa brevissima introduzione, il termine *Logica* viene dal greco, con cui i filosofi indicavano lo studio dei processi del pensiero, e in Matematica si riferisce allo studio delle forme del processo deduttivo, attraverso l'analisi della loro validità. Penso sia difficile interpretare questa descrizione senza aver prima studiato un po' di Logica; per i nostri limitati scopi, essa serve alla costruzione di un linguaggio adatto a rendere con precisione delle affermazioni di carattere matematico; con ciò si intende che l'affermazione deve essere di senso compiuto, non ambigua, e assoluta.

1. Linguaggio comune e linguaggio matematico

Gli animali sociali hanno la capacità di collaborare per aumentare la capacità di sopravvivenza sia del singolo individuo che della sua specie; alla base di tale collaborazione c'è la capacità di comunicare, attraverso lo sviluppo di un linguaggio. Ciò è caratteristico della specie umana, ma non esclusivamente: basti pensare alle formiche, o alle api, o alcune specie di pesci, e altri animali. Il linguaggio permette di comunicare, e quindi di attuare azioni coordinate a vantaggio del singolo e/o della comunità. Ci sono quindi vari linguaggi, diversificati non solo in base alle specie animali (le formiche comunicano tra loro tramite segnali chimici, le api tramite odori e "danze"), ma anche all'interno di una stessa specie (per esempio: la specie umana), creati e sviluppati apposta per svolgere al meglio la comunicazione in un certo contesto specifico.

Facciamo qualche esempio concreto:

***Esercizio* 1.** Chiedete a un amico di aiutarvi a fare un piccolo gioco. Dovrete comunicare con lui, ma senza usare parole, solo con gesti e versi, e lui potrà interagire con voi allo stesso modo; alla fine, deve scrivere ciò che ha capito del vostro messaggio. Provate a comunicargli che:

(1) Ho fame!
(2) Ho sete!
(3) Tranquillo, sto bene!
(4) Ieri ho mangiato un'anguria squisita!
(5) Sono appena tornato dalle vacanze.
(6) Il prossimo fine settimana assisterò a un concerto.
(7) Mi piace moltissimo andare in campeggio.
(8) La macchina ha un problema alla sua centralina elettronica.

Come avrete sperimentato, il linguaggio dei gesti/versi ha capacità comunicative molto limitate:[1] va bene per alcune situazioni semplici, ma è del tutto inadeguato se il concetto da comunicare è già di un pelo più complesso. Il linguaggio *verbale* (cioè l'adozione di un linguaggio costituito da parole) ha ampliato enormemente non solo l'efficacia comunicativa, ma anche il livello dei concetti esprimibili: oltre a poter esprimere fatti elementari (p.es.: *Ho fame*) permette di esprimere molto altro, per esempio sensazioni, speranze, strategie e concetti astratti (*orgoglio, paura, universo*).

C'è bisogno di altro? Beh, sì: dato che la vita di un essere umano è limitata nel tempo, le esperienze di vita e le scoperte di un singolo individuo potenzialmente utili ad altri possono essere trasmesse verbalmente solo fintanto che l'individuo è in vita, a meno che non vengano largamente e diffusamente condivise. Perciò il passo successivo nella creazione di un linguaggio di successo è il passaggio dalla comunicazione verbale orale a quella *scritta*: anche le stesse parole usate oralmente devono essere registrate per permanere nella disponibilità di altri. Per questo scopo sono stati creati ed adottati dei linguaggi scritti, che riproducono il linguaggio orale e perpetuano la conoscenza di parole, concetti e insegnamenti. Non è un caso che i primi insegnamenti delle nostre vite siano relativi all'apprendimento del linguaggio verbale scritto (*leggere, scrivere e far di conto*).

Questo ora è abbastanza? Forse sì, se si è un bambino di dieci anni, probabilmente (ma non ne sono certo). Più in là, direi proprio di no. Il punto è che nel corso delle nostre vite ci immergiamo in contesti sempre più specifici, e il linguaggio comune diventa rapidamente inadeguato. Facciamo un altro piccolo esperimento:

***Esercizio* 2.** Prendetevi un attimo e provate a valutare le vostre probabilità di successo nei seguenti compiti:

(1) Un vostro amico non ha visto il film *Avengers: Infinity War* e vorrebbe vedere con voi il seguito *Avengers: Endgame*, ma ha bisogno di sapere cosa è già successo. Siete in grado di aiutarlo, spiegandogli *a parole* (a voce o scritte) tutto quel che è essenziale per capire il seguito, e i dettagli che vi sono piaciuti di più?
(2) Siete stati a una mostra di pittura e, anche se non siete particolarmente sensibili a questa forma artistica, uno dei quadri esposti vi ha letteralmente tolto il fiato, Quando uscite non vedete l'ora di contattare un vostro amico,

[1] nel senso: *questo* primitivo linguaggio dei gesti/segni! Il *vero* linguaggio dei segni è tutt'altra cosa, ed ha capacità comunicative praticamente equivalenti al linguaggio verbale: l'unico suo limite è che sono poche le persone che lo conoscono!

un bravissimo pittore, per chiedergli di rifarvelo (comprare l'originale è impossibile!). Siete in grado di spiegargli *a parole* (a voce o scritte) come realizzarlo, se non tutto almeno nei particolari che vi hanno dato così tante emozioni?

Dovrebbe essere molto chiaro che il linguaggio comune basta per portare a termine il primo compito (beh, più o meno: bisogna sapere chi sono Iron Man, Thanos e tante altre cose, sicuramente non parte del linguaggio comune, ma prendiamole per buone), ma è assolutamente inadeguato nel secondo caso. Ora facciamo un paio di esempi ancora più estremi:

***Esercizio* 3.**

(1) Avete le mani d'oro: siete un bravo carpentiere, un discreto muratore, un abile elettricista e un eccellente idraulico. Avete visto una casa che vi ha colpito, e volete costruire per voi una uguale; così, andate dall'architetto per farvi dare tutte le indicazioni che servono per la sua realizzazione. Lui vi vende il progetto, completo di tutte le specifiche costruttive, ma voi non sapete leggerlo. Potete chiedergli di scrivere le indicazioni a parole, invece che darvi il progetto? Nel senso: vi aspettate davvero che non vi manderà a quel paese?
(2) Non siete un musicista, ma vi è venuto in mente un motivo musicale accattivante, che può essere un successo. Lo sentite nella vostra testa con tutti i dettagli: il tempo, l'accompagnamento, la melodia e le variazioni. Avete degli amici musicisti, anche molto bravi, che potrebbero suonarlo. Riuscireste a spiegargli con tutti i dettagli cosa suonare e come, usando solo le parole (non sapete suonare, non sapete fischiare, e non siete nemmeno intonati)?

Questi sono solo due esempi, tra tantissimi, in cui si evidenzia una cosa: contesti specifici richiedono quasi sempre linguaggi specifici, perchè il linguaggio comune è inadeguato. E' per questo che si impara il "disegno tecnico" con tutti gli annessi e connessi (simbologia, normativa, calcoli strutturali da effettuare,...), così come è per questo che i musicisti hanno sviluppato un linguaggio (la notazione musicale) ad hoc: è impossibile comunicare effettivamente in situazioni specifiche senza un linguaggio adatto a trasmettere *esattamente* ciò che si intende.

Da simili necessità nasce naturalmente l'introduzione e l'adozione di un linguaggio specifico per la Matematica; la scrittura

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(\left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta \Rightarrow |\cos x| < \varepsilon\right)$$

esprime un concetto ben preciso, scritto nel linguaggio appropriato perchè non può essere reso con precisione nel linguaggio comune. Se al momento non si è in grado di comprenderlo, non è un problema: come tutti i linguaggi, si può imparare. Vorrei sottolineare però che il nuovo linguaggio non consiste semplicemente nell'utilizzo di nuovi simboli ($\forall$, $\exists$, $<$, $|\cos x|$, $\Rightarrow$) rispetto alle tradizionali lettere, ma anche (e, forse, soprattutto) nella comprensione di ciò che quella *esatta sequenza* di simboli esprime.

Resta il punto fondamentale: *è impossibile sviluppare concetti matematici astratti senza l'utilizzo di un linguaggio adatto*, così come è impossibile per un'impresa di costruzioni realizzare un palazzo se non è in grado di leggere e interpretare il progetto, o per un musicista suonare uno spartito se non sa leggere la musica.

A beneficio del lettore, preciso due cose:

- il linguaggio matematico NON è la Matematica: è solo un linguaggio, così come uno spartito NON è la Musica che rappresenta. Il linguaggio, cioè, NON è il concetto, ma lo strumento con cui esprimere il concetto;

- a differenza di altre situazioni, il linguaggio comune non è solo inefficace per esprimere concetti matematici (come accade per la musica o la pittura, per esempio), ma in molte situazioni il linguaggio comune è anche *fuorviante* rispetto a quel che è il concetto matematico da esprimere. Vedremo a breve degli esempi di ciò.

Chiudiamo questa parte sul senso di come la Matematica sia legata al suo linguaggio con due citazioni, non di Matematici, ma di Fisici:

> *Every one of our laws*[2] *is a purely mathematical statement in rather complex and abstruse mathematics (...). You might say, " All right, then if there is no explanation of the law, at least tell me what the law is. Why not tell me in words instead of in symbols? Mathematics is just a language, and I want to be able to translate the language"(...). But I do not think it is possible, because Mathematics is not just another language. Mathematics is a language plus reasoning; it is like a language plus logic. Mathematics is a tool for reasoning."* (Richard Feynman)[3]

> *The language of mathematics is even more inborn and universal than the language of music; a mathematical formula is crystal clear and independent of all sense organs.* (Albert Einstein)

2. Proposizioni (Statements)

In matematica, una proposizione è una frase *dichiarativa o descrittiva, che deve ammettere necessariamente un unico valore di verità* (vero o falso): non entrambi, o nessuno, o variabile. Dato che tutto ciò che diremo si svilupperà attorno a questo semplice e naturale concetto, accertiamoci che sia ben compreso. Per il momento, per maggior chiarezza, useremo il linguaggio naturale.

Esempio 2.1.

(1) La frase Giovanni è alto un metro e novantatrè è una proposizione, nel senso appena espresso. Non è necessariamente vera, ma è oggettivamente possibile attribuirle un valore di vero o falso: basta misurare l'altezza di Giovanni e, se è effettivamente un metro e novantatrè, allora l'affermazione è vera; se invece è diversa da un metro e novantatrè, allora l'affermazione resta una proposizione, ma è falsa.

(2) La frase Giovanni è simpatico non è una proposizione, nel senso precedente. Infatti l'essere simpatico o meno non è una qualità verificabile oggettivamente: magari a me Giovanni è simpatico, a qualcun altro no. Non è possibile dire in senso assoluto che la frase è vera o falsa: il suo valore di verità varia a seconda del soggetto, e quindi non è una proposizione, ma solo una frase nel linguaggio corrente che esprime un'opinione.

(3) La frase L'uomo vide una donna con un telescopio è una proposizione? Qui c'è un primo esempio di come il linguaggio corrente può trarre in inganno, a causa delle sue intrinseche ambiguità: la frase può essere intesa in due modi!
   - *L'uomo ha visto una donna che aveva con sè un telescopio.* Questa è una proposizione, che può essere vera o falsa ma su cui il giudizio è oggettivo, per cui è una proposizione;

[2] (della Fisica, n.d.a.)

[3] tra i tanti altri importanti contributi alla Fisica, Feynman è considerato il padre delle cosiddette *nanotecnologie*, oltre che l'ispiratore dei cosiddetti *computer quantistici*. Non si può certo dire di lui che fosse interessato ai soli aspetti formali dei concetti...

- *usando un telescopio, l'uomo ha visto una donna.* Anche questa è una proposizione, ma differente dalla precedente.

Poichè il senso della frase originale, così come scritta, non è univocamente determinato, la frase è ambigua, e quindi NON è una proposizione (il suo valore di verità dipende dal senso attribuito alla frase).

(4) La frase Che tempo farà domani? è sicuramente una frase di senso compiuto espressa nel linguaggio corrente, ma NON rientra tra quelle che chiamiamo proposizioni. Infatti è una frase interrogativa, non una dichiarazione o una descrizione, e per lei non ha senso parlare di vero o falso.

(5) La frase Stai lì seduto e buono! non è una proposizione, perchè è una frase esortativa, non dichiarativa o descrittiva. Ha perfettamente senso nella vita comune, ma non è ciò che qualifichiamo come una proposizione.

Come appena visto, il linguaggio corrente si presta a generare ambiguità e malintesi, perciò è tutt'altro che adatto a un contesto in cui i dettagli sono essenziali. Ci si potrebbe chiedere se, stando attenti, usando le parole con molta attenzione, si può rendere *più preciso* il linguaggio naturale; domanda legittima, ma la risposta è sostanzialmente negativa: non si può!

Il motivo del giudizio è che il linguaggio corrente funziona proprio perchè è contestuale: poche parole, inserite nel contesto, rendono il significato. Però, per esempio, la frase *non mi sento bene*, semplice e perfettamente comprensibile, ha un senso diverso se la dico io (vuol dire che io non mi sento bene) o se la dice un altro (se la dice Giovanni, vuol dire che è Giovanni che non si sente bene)!

Per questo motivo, è nella natura stessa del linguaggio corrente che una singola affermazione possa avere più significati: sarà poi la nostra capacità di interpretarla a seconda del contesto che renderà il senso corretto del messaggio. Le ambiguità non sono di una sola specifica natura, ma possono incorrere in funzionalità differenti, e talvolta il risultato finale è quasi comico:

Esempio 2.2. *(Ambiguità sintattiche)*
Senza commentare (lasciamo a ciascuno il compito di farlo) un breve elenco di frasi in cui l'ambiguità è dovuta alla *sintassi* con cui la stessa è stata costruita:

- Rapina in banca con pistola da 150.000 euro
- Ci scusiamo per il disagio lavoriamo per voi
- Si vendono letti di ferro per bambini con palle d'ottone
- Pierino dice il maestro è un asino
- Gianni e Maria sono sposati con due gemelli.

Esempio 2.3. *(Ambiguità semantiche)*
Una stessa parola può avere significato differente in contesti diversi, causando ambiguità:

- Quel cane del vigile
- La vecchia porta la sbarra
  (è una vecchia che porta una sbarra, o è una vecchia porta che sbarra un accesso?)
- Il prete che ha sposato mia sorella
- la pianta spoglia
  (è una pianta mezza morta, o si riferisce alle spoglie mortali di qualcuno?)
- ho passato il porto a mezzanotte
  (il porto delle navi, o a mezzanotte ha passato una bottiglia di vino?)

Esempio 2.4. *(Umorismo involontario)*
Talvolta, le frasi che dovrebbero avere un senso ovvio per chi le scrive diventano invece involontariamente comiche. Ci sono alcuni comici che usano sistematicamente controllare giornali e annunci pubblicitari per scovarle! Eccone un piccolo assaggio:

- La macelleria resta aperta la domenica solo per i polli
- Non andate altrove a farvi derubare, venite da noi
- Al reparto bambini 3 al prezzo di 2
- Si vendono impermeabili per bambini di gomma
- Si fanno cappotti con la pelle dei clienti
- Cinquecento contro un albero: tutti morti

Queste sono situazioni comiche, in cui il linguaggio comune inganna a causa di una frase male espressa; d'altra parte, anche una frase matematica, espressa correttamente nel linguaggio corrente, può facilmente ingannare chi non sia attento: ciò spesso nasce da una cattiva comprensione di quanto scritto chiaramente, che a sua volta è tipicamente causato o dal non conoscere l'esatto significato di un termine o anche, più banalmente, dal prendere *fischi per fiaschi*. Un paio di esempi:

***Esercizio* 4.** Considerata la seguente indicazione: scrivere un numero di cinque cifre, tutte pari e a due a due distinte, decidere il valore logico delle seguenti proposizioni:

(1) Il numero 24680 può essere scelto
(2) Il numero 24268 può essere scelto
(3) Il numero *quattromilaseicentoventotto* NON può essere scelto
(4) Il numero 46218 può essere scelto.

Svolgimento. Un errore frequente è confondere il concetto di *cifra* e quello di *numero*: le *cifre* sono simboli, e nella pratica comune quelle usate sono precisamente $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; d'altra parte, per esempio, nel sistema binario le cifre sono i soli simboli 0 e 1, mentre nel sistema esadecimale si usano sedici cifre, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Un *numero*, invece, in un sistema posizionale è rappresentato da una sequenza ordinata di cifre. Per esempio, il *numero* **due** è rappresentato da una sequenza di cifre: nel sistema a base decimale, basta una sola cifra a rappresentarlo: 2; nel sistema binario per rappresentare il numero **due** servono due cifre, e precisamente **due** è rappresentato dalla sequenza di cifre (binarie!) 10. Con un *abuso di linguaggio*, consentito dalla pratica, si parla di *cifre pari* intendendo *i numeri pari rappresentati da una sola cifra*.

Nel contare di quante cifre è formata la rappresentazione di un numero, non si considerano le cifre 0 iniziali: il numero **due** è scritto 2, non 02, per cui è rappresentato da una sola cifra. Invece 20 è un numero di due cifre. Fa eccezione il numero zero: la sua rappresentazione è 0, costituito da una sola cifra, anche se inizia (e finisce!) per 0.

Infine, un'altra fonte di frequente (immotivata) confusione è l'espressione *a due a due distinte*: vuol dire che nella rappresentazione del numero in ogni posizione c'è una cifra diversa (non c'è una stessa cifra che occupa due posizioni distinte).

Alla luce di questi chiarimenti, è immediato verificare che l'affermazione (1) è vera: il numero 24680 può essere scelto, perchè è un numero di 5 cifre, esse sono tutte pari, e non c'è una cifra ripetuta. L'affermazione (2) è falsa: in 24268 la cifra 2 compare due volte; l'affermazione (3) è vera: il numero in questione è rappresentato da 4628, tutte cifre pari a due a due distinte, ma è di 4 cifre, non 5. Infine, l'affermazione (4) è falsa: nel numero 46218 compare la cifra dispari 1. □

***Esercizio* 5.** Assegnata la frase Si selezionino i numeri di quattro cifre minori o uguali a 4789. Tra essi, si selezionino poi quelli costituiti da cifre tutte dispari, stabilire se sono vere le proposizioni

(1) il numero 315 va selezionato in entrambe le richieste;
(2) il numero 3567 va selezionato nel primo caso e non nel secondo;
(3) il numero 5379 va selezionato solo per la seconda richiesta;

(4) il numero 1797 va selezionato per la prima richiesta, ma non nella seconda.

Svolgimento. Si è capita bene la frase? In particolare, la prima fonte di (possibile) confusione è in numeri di quattro cifre minori o uguali a 4789: a chi si riferisce la parola minori? Alle cifre o ai numeri? Come detto, le cifre sono simboli, non numeri (anche se ci sono numeri rappresentati da una singola cifra, come per esempio 2), per cui il minori si riferisce ai numeri, non alle cifre!

Detto questo, è chiaro che (1) è falsa: 135 è un numero di tre cifre, non quattro, e quindi non va bene per la prima richiesta, nè tantomeno per la seconda. La (2) è vera: 3567 è un numero di quattro cifre, ed è minore di 4789, per cui risponde ai requisiti della prima richiesta. Però, tra le sue cifre ce n'è una pari, precisamente 6, e quindi non soddisfa la seconda richiesta. La (3) è falsa: è vero che 5379 è costituito da cifre tutte dispari, ma nella seconda richiesta c'è scritto di effettuare la seconda selezione solo tra i numeri che soddisfano la prima, e 5379 non è uno di essi, visto che è maggiore, e non minore, di 4789. Infine, anche la (4) è falsa: 1797 è un numero di quattro cifre e minore di 4789, per cui passa la prima selezione; d'altra parte, le sue cifre sono tutte dispari, e quindi passa anche la seconda selezione, contrariamente da quanto affermato in (4). □

Esercizio 6. Assegnata la frase: considerati i numeri strettamente minori di 3469, selezionare tra essi quelli quelli contenenti almeno una cifra dispari e al più una cifra pari, stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

(1) Il numero 436 deve essere preso in considerazione
(2) Il numero 3576 deve essere preso in considerazione
(3) Il numero 1357 deve essere preso in considerazione
(4) Il numero 2468 deve essere preso in considerazione

Svolgimento. Il problema proposto ci chiede come prima cosa di considerare i numeri strettamente minori di 3469. Tra questi numeri, ovvero tra tutti quelli minori di 3469, dobbiamo considerare i numeri che contengono almeno una cifra dispari ed al più una cifra pari. Si ha chiaro cosa si intende con la parola almeno? Si ha chiaro cosa significa l'espressione al più? Perchè capita molto spesso (e non dovrebbe affatto!) che su queste espressioni ci siano dubbi.

Il termine almeno vuol dire $\geqslant$: almeno uno vuol dire uno o di più, cioè $\geqslant 1$; così pure, almeno due vuol dire due o più, cioè $\geqslant 2$, e così via. In particolare, dire almeno uno è diverso che dire più di uno!

Con al più si intende invece $\leqslant$: al più uno vuol dire meno di uno, o al massimo uno, cioè $\leqslant 1$; al più cinque vuol dire meno di cinque, o cinque al massimo, cioè $\leqslant 5$. E' diverso da dire meno di cinque, che vuol dire semplicemente < 5. Perciò, dire che c'è al più una cifra pari vuol dire che o non ci sono affatto cifre pari, oppure ce n'è una sola. E' sorprendente vedere quanto frequentemente queste espressioni vengano confuse tra loro, creando l'effetto *fischi per fiaschi*.

Alla luce di quanto detto, si vede subito che l'affermazione (1) è falsa: il numero 436 è strettamente minore di 3469, ma contiene due cifre pari e questo non è ammesso. Anche l'affermazione (2) è falsa: il numero 3567 contiene almeno una cifra dispari (ne ha in effetti tre) e al più una cifra pari (in effetti, esattamente una), ma non è strettamente minore di 3469, e quindi non deve essere preso in considerazione.

L'affermazione (3) è vera: il numero 1357 è un numero strettamente minore di 3469 che contiene almeno una cifra dispari (ne contiene quattro) e al più una cifra pari (ne contiene zero).

L'affermazione (4) è falsa: il numero 2478 è un numero strettamente minore di 3469, ma contiene tre cifre pari e questo non è ammesso. □

3. Costruire nuove proposizioni: gli operatori logici di base

Prendiamo in considerazione la proposizione *4 è un numero pari*: la sua struttura è ridotta all'osso, e precisamente c'è un soggetto (il 4), un verbo (è) e poi una proprietà del soggetto (un numero pari). Non è possibile esprimere questa proposizione in modo più sintetico: non possiamo eliminare il soggetto, nè il verbo, nè la proprietà circa il soggetto, se vogliamo esprimere il concetto in altro modo (la frase 4 è un numero avrebbe senso compiuto, ma diverso dal precedente) più sintetico. Le proposizioni di questo tipo si dicono per l'appunto *proposizioni semplici*, e sono i mattoni con cui costruire altre proposizioni. In effetti, anche nel linguaggio comune, è ben raro che delle frasi siano così corte: in genere le frasi pronunciate/scritte quando comunichiamo combinano in vari modi più frasi semplici. Per esempio, la frase Filippo lavora a Bari e abita a Trani è ottenuta componendo due frasi più semplici: la frase Filippo lavora a Bari e la frase (Filippo) abita a Trani; esse sono state combinate in un'unica frase, con un senso diverso da quello delle singole componenti, usando una semplice lettera (la e). Per convincersi che effettivamente il senso complessivo della frase è differente da quello delle sue componenti, provate a cambiare ciò che le lega: per esempio, Filippo lavora a Bari perciò abita a Trani ha un senso molto differente dal precedente.

Questo tipo di operazione, con cui leghiamo più frasi per esprimere un concetto più articolato, è una parte molto comune del nostro linguaggio, e non limitato alle proposizioni. Per esempio, oggi è una bella e calda giornata, ma preferirei andare a lezione per studiare Logica invece che andare al mare è (una bugia) composta da varie sotto-frasi, non tutte proposizioni, ma ha senso pienamente compiuto.

In linguistica, le parole che servono per collegare frasi differenti per formarne una nuova si chiamano *congiunzioni sintattiche*, e le frasi ottenute usandole si dicono frasi *composte* (per distinguerle da quelle semplici). Noi però non stiamo facendo linguistica, e lavoreremo solo con proposizioni: quel che useremo per legare proposizioni date (semplici o meno) e costruirne di nuove sono i cosiddetti *operatori logici*. Quelli di base non sono tanti: solo tre, e precisamente gli operatori

$$.\mathrm{AND}.\ \text{o}\ \wedge \qquad .\mathrm{OR}.\ \text{o}\ \vee \qquad \text{e}\ \mathrm{NOT}.\ \text{o}\ \neg$$

(notare i/il punti/o accanto alle lettere usuali: servono a sottolineare come vanno usati). I simboli strani invece sono quelli dedicati agli operatori logici di base nella simbologia matematica. Perciò, date due proposizioni p e q, scrivere $p.\mathrm{AND}.q$ o scrivere $p \wedge q$ vuol dire esattamente la stessa cosa: combinare le proposizioni p e q (in quest'ordine) usando l'operatore logico indicato con .AND., o equivalentemente con $\wedge$, per formare una nuova proposizione.

Questi tre operatori formano un sistema *funzionalmente completo*: cioè ogni proposizione composta è ottenibile componendo un numero finito di altre proposizioni tramite questi soli operatori logici.

Le parole (in inglese) con cui sono indicati gli operatori logici sono state scelte perchè il loro ruolo nel combinare le proposizioni corrisponde grossomodo a quello che hanno nel linguaggio corrente; per esempio, siccome p e q sono proposizioni, e vogliamo che $p.\mathrm{AND}.q$ sia ancora una proposizione, dobbiamo essere in grado di dire quale dev'essere il valore logico di $p.\mathrm{AND}.q$ a seconda del valore logico assunto da p e q. Sinteticamente, possiamo dire che, come nel linguaggio comune,

$$p.\mathrm{AND}.q \text{ è vera quando sono vere sia } p \text{ che } q\text{, e solo allora.}$$

Questo funziona bene per l'esempio precedente: dire che la proposizione *Filippo lavora a Bari e abita a Trani* è vera (cioè: ha valore logico T, abbreviazione di *True*) vuol dire che è vero sia che *Filippo lavora a Bari* sia che *Filippo abita a Trani* (cioè, entrambe le proposizioni hanno valore logico T); se Filippo lavorasse a Bari ma abitasse a Monopoli la frase completa sarebbe FALSA (cioè *Filippo lavora a*

Bari e abita a Trani avrebbe valore logico F, abbreviazione di *False*), non vera, anche se la prima parte (Filippo lavora a Bari) è vera.

Però, ormai sappiamo che il linguaggio corrente può fuorviare!

Esempio 3.1. Le affermazioni

(1) *Lui sparò un colpo e la cassa cadde nel vuoto*
(2) *La cassa cadde nel vuoto e lui sparò un colpo*

nel linguaggio corrente vogliono dire la stessa cosa? Dovrebbero, ai sensi della "definizione" che abbiamo cercato di dare: coinvolgono le stesse componenti (*"Lui sparò un colpo"* e *"La cassa cadde nel vuoto"*), combinate con il connettore logico .AND., per cui tanto la proposizione composta (1) quanto la (2) sono vere esattamente se le proposizioni componenti sono entrambe vere.

D'altra parte, nessuno considererebbe (1) e (2) come frasi con lo stesso significato. Questo perchè il linguaggio corrente è, come già detto, contestuale, e la funzione svolta dalla congiunzione *e* nel linguaggio corrente varia a seconda del contesto. Nell'esempio specifico, la *e* svolge il ruolo sì di congiunzione, ma anche quello di fornire un *ordine temporale*: è diverso se *prima* lui sparò un colpo e *poi* la cassa cadde, oppure se prima la cassa cadde e poi, magari per lo spavento, lui sparò un colpo!

Occorre perciò attribuire un significato non ambiguo a quel che dobbiamo intendere con, per esempio, p.AND.q, perchè assimilarlo al semplice *p e q* (p.es.: esco e ti raggiungo) del linguaggio corrente non è abbastanza preciso.

Il modo di attribuire un senso non ambiguo a una proposizione ottenuta usando un operatore logico è in effetti quello di prima; ci manca solo essere un po' più specifici:

Per attribuire significato non ambiguo all'operatore logico basta specificare quale dev'essere il valore logico della proposizione composta in corrispondenza dei valori logici delle proposizioni componenti. Ciò si realizza attraverso le tavole di verità

Definizione 3.2. (di $\wedge$ – congiunzione logica)
Date le proposizioni p, q, la proposizione $p \wedge q$ ha valore di verità T esattamente quando *sia* p *sia* q hanno valore logico T, e valore logico F negli altri casi. Ciò è riassunto nella tavola di verità seguente:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Esempio 3.3. Sia $\pi = 3.14\ldots$ il numero che abbiamo conosciuto trattando la circonferenza già dalla scuola primaria.

- La proposizione $(\pi > 3) \wedge (\pi < 3.2)$ è una proposizione, diversa da $\pi > 3$ e da $\pi < 3.2$, e vuol dire che il numero π è sia strettamente più grande di 3 che strettamente più piccolo di 3.2. Il suo valore di verità è T;
- $(\pi > 3) \wedge (\pi < 2)$ è un'altra proposizione, stavolta falsa. Infatti, $\pi > 3$ è vera, mentre $\pi < 2$ è falsa;
- (Lui sparò un colpo)$\wedge$(La cassa cadde nel vuoto), se vera, esprime SOLO il fatto che ci fu uno sparo e una cassa che cadde nel vuoto. Il senso che è attribuito al simbolo $\wedge$ riguarda SOLO il valore logico in dipendenza del valore logico delle proposizioni componenti: dal punto di vista della logica, il fatto che sia vera ci dice solo che le proposizioni costituenti sono entrambe vere, e non ci dà alcuna indicazione rispetto l'ordine temporale tra i due eventi.

Anche per l'operatore logico .OR. vale un discorso analogo, grossomodo legato al senso comune. Anche qui ci sono da evitare le possibili ambiguità

Esempio 3.4. Nelle affermazioni in linguaggio corrente

- I pezzi degli scacchi sono bianchi o neri;
- Le cose più belle della vita o sono illegali, o sono immorali, o fanno ingrassare *(G.B. Shaw)*

la funzione svolta dalla congiunzione sintattica *o* è differente: nel primo caso indica *esclusività* (delle due, l'una, ma non entrambe o nessuna), nella seconda *inclusività* (se la proposizione fosse vera, una cosa bella della vita dovrebbe per forza essere o illegale, o immorale o fare ingrassare, ma potrebbe benissimo darsi che si tratti di una cosa illegale e che fa ingrassare).

Per il nostro contesto, l'operatore .OR. è detto *disgiunzione inclusiva*, e anche per lui abbiamo bisogno di dare una definizione rigorosa tramite le tavole di verità:

Definizione 3.5. ($\vee$ – Inclusive OR, o disgiunzione inclusiva)
Date le proposizioni p, q, la proposizione $p \vee q$ ha valore di verità T solo quando *almeno una* tra p e q risulta vera, e F solo nel caso in cui sia p che q sono false. La tavola di verità di $\vee$ è

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Esempio 3.6. Siano a e b numeri reali. Dire che $(a = 0) \vee (b = 0)$ è vera (ha valore logico T) vuol dire che almeno uno tra a e b è nullo, e ciò comprende (per la definizione data) il fatto che per $a = b = 0$ il valore logico della proposizione composta $(0 = 0) \vee (0 = 0)$ è T.

***Esercizio* 7.** La proposizione $(3 < 5) \vee (1 = 0)$ è vera o falsa? E' domanda a cui è facile rispondere: qui p è la proposizione $3 < 5$, che ha valore logico T, mentre q è la proposizione $1 = 0$, che è falsa e quindi ha valore logico F. Il valore logico di $p \vee q$ è perciò T.

L'ultimo operatore logico di base opera con una sola proposizione alla volta, invece che con due. Di conseguenza, la sua tavola di verità sarà più piccola di quella di $\vee$ e $\wedge$:

Definizione 3.7. ($\neg$ – Negazione logica)
Data una proposizione p, la proposizione $\neg p$ ha valore di verità T esattamente quando p è falsa (e F se p è vera). La sua tavola di verità è la seguente

p	$\neg p$
T	F
F	T

Benchè semplice, la negazione mal si accorda con le espressioni del linguaggio corrente, e sorprendentemente è causa di un gran numero di interpretazioni errate!

***Esercizio* 8.** Se p è la proposizione *Tutte le macchine italiane sono fatte male*, qual è la sua negazione?

(1) Tutte le macchine italiane sono fatte bene
(2) tutte le macchine italiane non sono fatte male
(3) almeno una macchina italiana è fatta bene
(4) almeno una macchina italiana non è fatta male

Può essere tutte le macchine straniere sono fatte male?

Torneremo più in là su questo tipo di situazioni, con una trattazione più completa, ma è interessante che si provi a rispondere alla domanda già ora (è possibile farlo!), in modo corretto, ovviamente.

Vediamo qualche altro piccolo esercizio sul tema con le considerazioni che abbiamo a disposizione sinora:

***Esercizio* 9.** Si consideri la proposizione: Il cellulare di Giovanni ha 128 GB di spazio e la telecamera da 12MP. Se questa proposizione è falsa, deduciamo che

(1) Il cellulare di Giovanni ha 64 GB di spazio e telecamera da 8MP;
(2) Il cellulare di Giovanni non ha 128 GB di spazio e non ha la telecamera da 12MP;
(3) Il cellulare di Giovanni o non ha 128 GB di spazio o non ha la telecamera da 12MP;
(4) Il cellulare di Giovanni ha 64 GB di spazio o la telecamera da 8MP.

Svolgimento. La proposizione di partenza afferma che il cellulare di Giovanni ha due caratteristiche: 128 GB di spazio e la telecamera da 12MP. Basta che il cellulare di Giovanni non abbia una delle due caratteristiche per farla risultare falsa: ad esempio, il cellulare di Giovanni potrebbe avere 256 GB di spazio e la telecamera da 12MP. In tal caso la proposizione di partenza è falsa. Lo stesso accade se il cellulare di Giovanni ha 128 GB di spazio e la telecamera da 8 MP.

Il fatto, appunto, è che la proposizione di partenza afferma che sono due le qualità soddisfatte dal cellulare: se è soddisfatta una sola, o nessuna, la proposizione complessiva è falsa. Pertanto se la proposizione è falsa, possiamo dedurre che l'affermazione (3) è vera.

L'affermazione (1) non è deducibile dalla negazione della proposizione: non possiamo trarre conclusioni affrettate dal sapere che il cellulare non ha 128 GB di spazio oppure non ha telecamera da 12MP.

L'affermazione (2) è troppo restrittiva: se l'affermazione è falsa, non è detto che il cellulare non possieda nessuna delle qualità, ma solo che ce n'è almeno una che non è soddisfatta.

L'affermazione (4) non è deducibile dalla negazione della proposizione iniziale: nessuno ci garantisce che l'unica alternativa al non avere 128 GB di spazio sia quella di avere 64 GB di spazio, così come non avere telecamera da 12MP abbia come unica alternativa avere una telecamera da 8MP. □

***Esercizio* 10.** Ciro ha un computer con 1 TB di HD o 16GB di RAM. Se questa affermazione è falsa, deduciamo che

(1) il computer di Ciro non ha 1 TB di HD e non ha 16 GB di RAM;
(2) il computer di Ciro ha 500 GB di HD o 8 GB di RAM;
(3) il computer di Ciro ha 500 GB di HD e 8 GB di RAM;
(4) il computer di Ciro non ha 1 TB di HD o non ha 16 GB di RAM.

Svolgimento. La proposizione di partenza dichiara che il computer di Ciro ha di sicuro almeno una tra le due caratteristiche seguenti: 1 TB di HD, oppure 16GB di RAM; potrebbe averle entrambe, ma di sicuro ne ha almeno una delle due. Se l'affermazione è falsa, il computer di Ciro necessariamente non può avere nè la prima (che renderebbe la proposizione di partenza vera) nè la seconda (idem) caratteristica, cioè non deve avere 1 TB di HD e non deve avere 16GB di RAM. Pertanto l'affermazione (1) è vera, e costituisce la negazione della proposizione iniziale.

L'affermazione (2) non è necessariamente vera: non abbiamo alcuna certezza che non avere 1 TB abbia come unica alternativa avere un HD da 500 GB; si noti peraltro che potrebbe benissimo accadere, per esempio, che il computer abbia 1 TB di HD e 8 GB di RAM, per cui risulterebbero vere tanto la proposizione inizale quanto la (2): in altri termini, la (2) NON è la negazione della proposizione di partenza.

L'affermazione (3) non è deducibile dalla negazione della proposizione di partenza: non possiamo trarre conclusioni affrettate dal sapere che il computer di Ciro non ha 1 TB di HD e non ha 16 GB di RAM.

L'affermazione (4) non è la negazione della proposizione, e non può essere dedotta dall'assumere che la proposizione di partenza sia falsa. Ad esempio il computer potrebbe avere 500GB di HD e16 GB di RAM ed in tal caso sarebbe vera (perchè non ha 1 TB) come la proposizione di partenza (perchè ha 16 GB di RAM). □

***Esercizio* 11.** Ogni Venerdì vado in piscina e al pub. Se questa affermazione è falsa, deduciamo che

(1) tutti i giorni vado in piscina e al pub;
(2) qualche Venerdì non vado nè in piscina nè al pub.
(3) qualche Venerdì non vado in piscina o non vado al pub.
(4) ogni Venerdì non vado nè in piscina è al pub.

Svolgimento. La proposizione di partenza dichiara che ogni Venerdì avvengono due cose: vado in piscina e al pub. Affinchè questa affermazione sia falsa, basta che non avvenga una delle due cose in un Venerdì qualsiasi, ovvero che esista un Venerdì in cui o non vado in piscina o non vado al pub.

Infatti la negazione di tale proposizione equivale a dire: Non è vero che ogni Venerdì vado in piscina e al pub. Per non essere vero, è sufficiente che esista un Venerdì in cui una delle due cose fallisca. Pertanto se la proposizione è falsa, possiamo dedurre che la proposizione (3) è vera.

L'affermazione (1) non è deducibile dal fatto che l'affermazione iniziale è falsa: se ogni giorno vado in piscina e al pub, in particolare anche ogni Venerdì vado in piscina e al pub, il che renderebbe vera la proposizione iniziale, mentre è falsa.

L'affermazione (2) nemmeno è deducibile, perchè è troppo restrittiva: potrebbe essere falsa tanto quanto la proposizione iniziale, per esempio se c'è un Venerdì in cui vado al pub senza essere andato in piscina.

L'affermazione (4) non è deducibile dalla negazione della proposizione iniziale: Non possiamo trarre conclusioni affrettate e concludere che ogni Venerdì mi astengo dall'andare sia in piscina che al pub; per esempio, ci potrebbe essere un Venerdì in cui vado solo in piscina (o solo al pub, va bene lo stesso), e risulterebbero false tanto la (4) quanto la proposizione iniziale. □

4. Implicazione ed equivalenza logica

L'*implicazione logica*, rappresentata dal simbolo $\Rightarrow$, è l'operatore logico introdotto per emulare il meccanismo di base dei nostri processi deduttivi. E' legato ai valori logici delle proposizioni costituenti, ma non esprime alcuna verità su essi: è una nuova proposizione. Rappresenta *grossomodo* il meccanismo *causa–effetto* della Fisica, ma quest'ultimo ne è una versione rafforzata.

Date le proposizioni p e q, l'implicazione logica da p a q si scrive $p \Rightarrow q$, e si legge p implica q. L'idea di fondo è che se p è vera, **e l'implicazione è vera**, allora anche q deve essere vera. La cosa è da comprendere subito e fino in fondo: esitazioni su questo concetto non sono ammesse, nello studio della Matematica. D'altra parte, il linguaggio comune ci porta rapidamente fuori strada rispetto alla comprensione dell'implicazione logica nella sua intera portata:

Esempio 4.1.

- L'implicazione logica ($\sqrt{2}$ è irrazionale) $\Rightarrow$ $(0 < 1)$ è vera o falsa?

- L'implicazione logica (Giulio Cesare è morto) $\Rightarrow (1+1=2)$ è vera o falsa?
- L'implicazione logica (1 è un numero pari)$\Rightarrow$ $(1+1=2)$ è vera o falsa?

Sulla sola base della descrizione approssimata appena data dell'operatore $\Rightarrow$, già queste domande possono causare un certo imbarazzo e risposte sbagliate. Nulla di male, sinora non abbiamo dato quel che ci serve per non aver dubbi: la definizione di $\Rightarrow$ tramite la sua tavola di verità. Però è interessante vedere cosa succede ragionando solo in termini di ciò che l'esperienza del linguaggio comune ci suggerisce. Perciò, ragionateci su e sperimentate. Più in là avrete modo di controllare se avete giudicato bene oppure no.

Ricominciamo daccapo, partendo da quello che siamo abituati a intendere con il termine *implicare*: normalmente, lo leghiamo al concetto fisico della relazione *causa–effetto*. Per esempio, lo facciamo nella frase *Se ti schiacci un dito ti fai male*.

In realtà, la relazione di causalità si basa su due componenti: una di *verità*, una di *conseguenzialità*. Per dirlo in termini rozzi: se succede p, allora succede q. Ma nulla possiamo dire se p non succede: la componente di conseguenzialità viene meno, e non abbiamo modo di capire se effettivamente il verificarsi di q sia causato o meno dal verificarsi di p (per continuare l'esempio di prima, non mi sono schiacciato un dito, ma ho preso una pallonata in faccia e mi sono fatto male lo stesso!).

Il senso dell'implicazione logica, invece, si basa su una singola componente, e precisamente quella di verità. Perciò, più che avere in mente la relazione fisica di causa–effetto, sarebbe meglio immaginare l'implicazione logica come un *contratto*.

Esempio 4.2. Alberto vuole intraprendere la carriera politica, e annuncia un contratto con i suoi elettori: *Se mi eleggerete, abrogherò le tasse*. Cosa deve succedere, dopo le elezioni, per poter affermare senza tema di smentita che il contratto non è stato rispettato?

Palesemente, se Alberto è stato eletto e non ha mantenuto la promessa, allora possiamo dire che lui ha infranto il contratto, cioè non lo ha rispettato. Però, se Alberto non risulterà tra gli eletti, nessuno potrà dire che lui ha infranto il contratto: da questo punto di vista, il contratto è stato rispettato in pieno, è solo che non c'è stato modo di attuarlo, perchè la premessa (l'elezione di Alberto) non si è verificata.

Possiamo ora dare la definizione esatta dell'operatore di implicazione logica:

Definizione 4.3. ($\Rightarrow$ – Implicazione logica)
Date le proposizioni p e q, la proposizione $p \Rightarrow q$ ha valore di verità F esattamente se p è vera e q è falsa (e negli altri casi è vera). La tavola di verità di $\Rightarrow$ è la seguente

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Si noti che, coerentemente ma in maniera controintuitiva, se p ha valore logico F l'implicazione è vera *indipendentemente* dal valore logico di q. Quindi, per esempio, l'implicazione$(1=2) \Rightarrow$ Osvaldo è colpevole di abigeato è un'implicazione con valore logico T! Naturalmente, nessun tribunale condannerebbe Osvaldo in base a ciò: l'implicazione sarà pure vera, ma ciò non comporta che lo sia la proposizione *Osvaldo è colpevole di abigeato* – come già detto, ribadiamo che la proposizione composta ha valore di verità dipendente da quelli delle costituenti, ma è *altro*, una *nuova* proposizione.

Osservazione 4.4. A differenza di quanto accade per gli operatori $\vee$ e $\wedge$, nella tavola di verità di $\Rightarrow$ c'è asimmetria nel ruolo di p e q. Cioè, mentre non è importante chi nominiamo prima tra p e q se dobbiamo legarli con gli operatori logici $\vee$ o $\wedge$, scrivere $p \Rightarrow q$ è diverso dallo scrivere $q \Rightarrow p$. Per questo, attribuiamo un nome diverso a seconda del posto in cui compaiono: in $p \Rightarrow q$ la proposizione p si dice la *premessa* (o *ipotesi*) dell'implicazione, e q la sua *conclusione* (o *tesi*). Se invece scriviamo $q \Rightarrow p$, allora la premessa dell'implicazione è q, non più p.

Esempio 4.5. Sia a un fissato numero reale, e consideriamo le due proposizioni

(1) $(a > 0) \Rightarrow (a^2 > 0)$;
(2) $(a^2 > 0) \Rightarrow (a > 0)$.

Entrambe coinvolgono le stesse proposizioni semplici, $a > 0$ e $a^2 > 0$ (domanda: queste sono proposizioni? Si, perchè qui sappiamo chi sia a: un fissato numero reale. Però è vero che potremmo precisarlo meglio, e lo faremo), ma (1) e (2) sono proposizioni molto diverse: mentre la (1) è vera quale che sia la scelta effettuata per a, la seconda non è sempre vera. Per esempio, se prendiamo $a = -2$, allora è vero che $a^2 > 0$, ma ciò non rende $a = -2 > 0$.

Ci sono tradizionalmente molti modi per esprimere un'implicazione usando il linguaggio corrente, e sicuramente sono stati incontrati molte volte nel corso degli anni di studio della Matematica nella scuola secondaria: l'implicazione $p \Rightarrow q$ può essere espressa a parole dicendo che

Diretta	***Inversa***
se p, allora q	q non appena p
p implica q	q consegue da p
p solo se q	q se p
p è sufficiente per q	q è necessaria per p
p è condizione sufficiente per q	q è condizione necessaria per p

E' bene imparare a riconoscere quale è l'implicazione, quando è espressa in uno di questi modi: abbiamo già detto che $p \Rightarrow q$ è una proposizione diversa da $q \Rightarrow p$, e uno degli errori più frequenti è leggere un'implicazione espressa in uno dei modi verbali della tabella e interpretarla attribuendo a p e q il ruolo sbagliato.

***Esercizio* 12.** Le frasi *Sarai promosso solo se studierai* e *Se studierai sarai promosso* vogliono dire la stessa cosa o no? E le frasi *Se studierai sarai promosso* e *Sarai promosso se avrai studiato*?

Svolgimento. La frase *Sarai promosso solo se studierai* vuol dire (vedi tabella di sopra) $p \Rightarrow q$, dove p è la proposizione *Sarai promosso* e q è la frase *studierai.* Vuol dire che non c'è possibilità che tu possa esser promosso se non hai studiato. Quindi se sei stato promosso, ciò implica che tu hai studiato, $p \Rightarrow q$. La seconda frase, invece, vuol dire $q \Rightarrow p$: se tu manterrai la tua parte del contratto (se studierai) è garantito che sarai promosso. Ma ciò è diverso dalla precedente frase: questo secondo contratto non esclude che tu possa esser promosso *pur senza aver studiato.*

Per la terza frase, dalla tabella si vede subito che vuol dire la stessa cosa della seconda: è un modo diverso di dire che se tu farai ciò che devi (studiare) allora sarai promosso, ma non esclude che tu possa esser promosso pur non avendo studiato.□

Penso possa essere apprezzato già qui il perchè la notazione matematica è più adatta al contesto del linguaggio verbale: è più semplice capire cosa si intende con $p \Rightarrow q$ oppure con la frase *q è condizione necessaria per p*?

***Esercizio* 13.** Alla luce della definizione precisa di $\Rightarrow$, rispondere al precedente Esempio 4.1 e controllare le risposte date a suo tempo.

***Esercizio* 14.** Se oggi piove, domani nel bosco ci saranno i funghi vuol dire che:

(1) Per esserci i funghi nel bosco domani, è necessario che oggi piova.
(2) Se domani ci saranno i funghi nel bosco, allora oggi è piovuto.
(3) Affinchè domani ci siano i funghi nel bosco, è sufficiente che oggi piova.
(4) Oggi c'è il sole e quindi domani non ci saranno funghi nel bosco.

Svolgimento. La proposizione di partenza è un'implicazione, in cui l'ipotesi p è la proposizione oggi piove e la proposizione domani nel bosco ci saranno i funghi ne costituisce la tesi q. Questa implicazione ci assicura che se si avvera l'ipotesi allora necessariamente segue la tesi. Nel caso in cui l'ipotesi non sia verificata non possiamo trarre alcuna conclusione sulla presenza o meno dei funghi domani: più precisamente, l'*implicazione* è certamente vera, ma nulla possiamo dire sul valore logico della tesi, perchè quest'ultima potrebbe essere tanto vera quanto falsa!

L'affermazione (1) vuol dire una cosa diversa dall'affermazione di partenza: la (1) esprime il concetto che necessariamente serve il verificarsi della pioggia oggi, per avere dei funghi nel bosco domani. Afferma che se domani ci saranno funghi allora oggi piove, e questo equivale all'implicazione $q \Rightarrow p$, diversa dall'affermazione di partenza. In quest'ultima, infatti, non si esprime nessuna necessità della pioggia oggi per i funghi domani: potrebbe benissimo essere che i funghi domani ci siano anche se oggi non è piovuto, ma ci dice che SE oggi piove, domani avremo la CERTEZZA che ci saranno i funghi.

L'affermazione (2) è un modo differente di esprimere quello che dice (1), e cioè $q \Rightarrow p$, perciò qualcosa di diverso dalla nostra affermazione di partenza.

L'affermazione (3) esprime lo stesso concetto dell'affermazione iniziale: è sufficiente che oggi piova perchè domani ci siano i funghi nel bosco. Nulla vieta che, se oggi non è piovuto, ugualmente nella nostra visita al bosco di domani potremmo trovare dei funghi: solo, non ne abbiamo la certezza, perchè se l'ipotesi è falsa, l'implicazione risulta vera tanto se la tesi è vera (ci sono i funghi) quanto se la tesi è falsa (i funghi non ci sono).

Infine, l'affermazione (4) è un'implicazione, ma diversa da quella che avevamo all'inizio: precisamente, interpretando oggi c'è il sole come negazione di oggi piove, vuol dire $\neg p \Rightarrow \neg q$, che di nuovo è un modo differente di esprimere l'implicazione $q \Rightarrow p$, come vedremo a breve. In effetti, se oggi c'è il sole, domani potrebbero ugualmente esserci i funghi, per altri motivi. □

***Esercizio* 15.** *Se un animale ha 4 zampe allora l'animale è un gatto* equivale a dire

(1) Se un animale è un gatto, allora ha 4 zampe
(2) Affinchè un animale sia un gatto, è necessario che abbia 4 zampe.
(3) Un animale è un gatto solo se ha 4 zampe.
(4) Affinchè un animale sia un gatto, è sufficiente che abbia 4 zampe.

Svolgimento. La proposizione di partenza è un'implicazione: se chiamiamo p la proposizione un animale ha 4 zampe e q la proposizione l'animale è un gatto, allora la fraze iniziale è $p \Rightarrow q$. Nel caso in cui l'ipotesi non sia verificata non possiamo trarre conclusione: se l'animale NON ha 4 zampe, non abbiamo la CERTEZZA che sia un gatto, ma nemmeno possiamo escluderlo (il "contratto" non è stato infranto in nessuno dei casi!). Quindi la nostra affermazione equivale a dire che è sufficiente per un animale avere 4 zampe per essere un gatto.

L'affermazione (1) non vuol dire questo: vuol dire che se un animale è un gatto allora ha 4 zampe, cioè esprime l'implicazione $q \Rightarrow p$, diversa dall'originale.

Anche l'affermazione (2) è diversa dalla nostra affermazione di partenza, perchè è un modo differente di esprimere quanto affermato in (1): $q \Rightarrow p$.

L'affermazione (3) continua a dire la stessa cosa (vedere la tabella precedente): vuol dire che è necessario che un animale abbia 4 zampe per essere un gatto, cioè di nuovo che $q \Rightarrow p$.

Solo l'affermazione (4) vuol dire la stessa cosa della nostra affermazione di partenza: se si verifica p allora si verifica q, cioè $p \Rightarrow q$. □

***Esercizio* 16.** Consideriamo le seguenti affermazioni: Se oggi dormo, domani andrò in palestra; se oggi non dormo domani sarò stanco. Se queste sono entrambe vere e domani non andrò in palestra cosa possiamo concludere?

(1) Anche se oggi dormo domani sarò stanco.
(2) Domani andrò in palestra e domani sarò stanco.
(3) Domani sarò stanco.
(4) Oggi dormo.

Svolgimento. La proposizione di partenza è che le affermazioni Se oggi dormo, domani andrò in palestra e se oggi non dormo domani sarò stanco sono entrambe vere. Detta p la proposizione *oggi dormo*, q la proposizione *domani andrò in palestra* ed r la proposizione *domani sarò stanco*, la prima proposizione esprime l'implicazione $p \Rightarrow q$, la seconda $\neg p \Rightarrow r$.

Nel nostro caso, se domani non andrò in palestra, possiamo di sicuro concludere che oggi non dormo: essendo vera $p \Rightarrow q$, se oggi dormissi, domani andrei *necessariamente* in palestra, cosa che non farò. Poichè allora $\neg p$ è vera (NON ho dormito), e stiamo supponendo che $\neg p \Rightarrow r$ è vera, *necessariamente* domani sarò stanco. Pertanto la deduzione corretta è l'affermazione (3).

L'affermazione (1) non si può dedurre dalle affermazioni iniziali: se oggi non dormo, possiamo concludere che domani sono stanco, ma se oggi dormo possiamo solo concludere che domani andrò in palestra, ma nulla in merito a se sarò o non sarò stanco.

Circa l'affermazione (2), si può dedurre che è falsa: il fatto che domani non andrò in palestra è una delle affermazioni da cui partiamo, e quindi la prima parte della congiunzione *domani andrò in palestra e domani sarò stanco* è già falsa, rendendo falsa l'intera proposizione. Notare che nulla possiamo dire circa la seconda parte (se o meno andrò in palestra).

Anche per l'affermazione (4) si può dedurre che è falsa: se oggi dormo, allora domani andrò *necessariamente* in palestra, mentre noi stiamo assumendo che domani non lo farò. Pertanto, come già detto precedentemente, siccome $p \Rightarrow q$ è vera, è anche vera che oggi non dormo (e quindi la (4) è falsa). □

Sappiamo che in genere, assegnate le proposizioni p e q, le proposizioni composte $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ sono in genere differenti, perciò il caso in cui esse vogliano dire *la stessa cosa* è degno di considerazione. Chiaro che l'espressione *due proposizioni vogliono dire la stessa cosa* non è abbastanza precisa, per cui diamo subito la

Definizione 4.6. ($\iff$ – Bicondizionale o equivalenza logica)
Date le proposizioni p e q, la proposizione $p \iff q$ ha valore di verità T esattamente quando p e q assumono lo stesso valore di verità (e negli altri casi è F). La tavola di verità di $\iff$ è la seguente:

p	q	$p \iff q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Come si vede dalla tavola, dire che $p \iff q$ è vera vuol dire che p e q saranno anche proposizioni differenti, ma assumono sempre lo stesso valore logico. Più che sull'operatore $\iff$, ciò fa spostare la nostra attenzione al ruolo di p e q, e ci consente di dare la seguente

Definizione 4.7. Le proposizioni p e q si dicono *logicamente equivalenti* se la proposizione $p \iff q$ ha valore logico T.

Modi verbali differenti per dire la stessa cosa sono

p è equivalente a q

p se e solo se q

p è condizione necessaria e sufficiente per q

Facciamo un esempio:

Esempio 4.8. (Leggi di equivalenza per uguaglianze)
Dalla scuola primaria abbiamo imparato a memoria le cosiddette *leggi di equivalenza per le uguaglianze*; la prima legge recita così

Siano a, b, c numeri reali. Le proposizioni p: $a = b$ e q: $a + c = b + c$ sono tra loro logicamente equivalenti.

Si noti che l'enunciato NON dice che p e q sono la stessa proposizione: se $c \neq 0$ i numeri a e $a + c$ sono differenti, e così b e $b + c$. La legge ci dice però che $a = b$ è vera se e solo se è vera l'uguaglianza $a + c = b + c$. Ad essa ricorriamo, per esempio, se vogliamo risolvere velocemente il problema *determinare i numeri reali x tali che $x + 5 = \sqrt{2}$*: siccome $x + 5 = \sqrt{2}$ è logicamente equivalente a $(x + 5) + (-5) = \sqrt{2} + (-5)$, siamo certi che il numero x cercato deve essere $x = \sqrt{2} - 5$.

In forma matematica, usando il linguaggio che stiamo imparando, la legge si scrive

$$\text{Siano } a, b, c \text{ numeri reali. Allora } (a = b) \iff (a + c = b + c).$$

La seconda legge di equivalenza per uguaglianze recita invece così:

$$\text{Siano } a, b, c \text{ numeri reali, e } c \neq 0. \text{ Allora } (a = b) \iff (ac = bc)$$

Di nuovo, ciò vuol dire che le proposizioni $a = b$ e $ac = bc$ sono equivalenti, SE (a differenza di prima) il numero c è diverso da zero.

Esempio 4.9. (Leggi di equivalenza per le disuguaglianze)
Siano a, b, c numeri reali. Le due leggi di equivalenza per le disuguaglianze sono le seguenti:

(1) la disuguaglianza $a \leqslant b$ è equivalente alla disuguaglianza $a + c \leqslant b + c$;
(2) se $c > 0$, la disuguaglianza $a \leqslant b$ è equivalente alla disuguaglianza $ac \leqslant bc$, mentre se $c < 0$ allora la disuguaglianza $a \leqslant b$ è equivalente alla disuguaglianza $ac \geqslant bc$.

Queste affermazioni, alle quali siamo abituati, esprimono l'equivalenza logica tra le affermazioni $a \leqslant b$ e $a + c \leqslant b + c$ (per la prima legge), e tra le affermazioni $a \leqslant b$ e $ac \leqslant bc$ se $c > 0$ (o tra $a \leqslant b$ e $ac \geqslant bc$ nel caso in cui $c < 0$). Di nuovo, come per le uguaglianze, ciò non vuol dire che le affermazioni citate siano *uguali*, perchè non lo sono: una cosa è dire che $2 < 3$, confrontando i numeri 2 e 3, un'altra è dire che $7 < 8$, confrontando i numeri 7 e 8; d'altra parte, la prima legge non dice affatto ciò! Quel che dice la prima legge, invece, è che siccome $7 = 2 + 5$ e $8 = 3 + 5$, l'affermazione $2 < 3$ è logicamente equivalente all'affermazione $2 + 5 < 3 + 5$, e cioè all'affermazione $7 < 8$.

Una parola di attenzione va detta in merito alla seconda legge: è vero che nel confrontare tra loro ac e bc per dedurre qualcosa dal confronto tra a e b è essenziale che $c \neq 0$ (altrimenti, il risultato di ac e bc è inevitabilmente 0, e ogni differenza tra a e b viene "cancellata"), ma mentre per le uguaglianze basta questo, per le disuguaglianze bisogna trattare separatamente i casi $c > 0$ e $c < 0$.

Per esempio, partendo dalla disuguaglianza $2 < 3$, se moltiplichiamo ambo i membri per 3 (numero positivo), otteniamo $6 < 9$, che continua a esser vera (lo sappiamo dalla prima legge di equivalenza per le disuguaglianze), ma se li moltiplichiamo per -3 otteniamo $-6 < -9$, che è una disuguaglianza falsa! Il comportamento corretto da tenere, quando moltiplichiamo ambo i membri di una disuguaglianza per un numero $c < 0$, ce lo dice la seconda legge di equivalenza per le disuguaglianze: non basta effettuare le moltiplicazioni, bisogna anche invertire il verso della disuguaglianza. Fatto ciò, la disuguaglianza ottenuta è un'affermazione logicamente equivalente a quella di partenza: è diversa ma, ha il suo stesso valore di verità, T se quello della disuguaglianza di partenza era T, e F se quello della disuguaglianza di partenza era F.

***Esercizio* 17.** *Assegnate le proposizioni p e q, esse sono logicamente equivalenti se e solo se le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ sono entrambe vere.*

Svolgimento. Basta controllare che la proposizione $p \iff q$ ha sempre lo stesso valore logico della proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Dato che i soli valori logici possibili di $p \iff q$ sono due (T e F), basta controllarli uno per uno:

- se $p \iff q$ ha valore logico T, sappiamo che p e q hanno lo stesso valore logico. Non sappiamo quale, ma deve essere lo stesso. Quindi consideriamo due sottocasi:
  - p e q hanno lo stesso valore logico T. Allora entrambe le implicazioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ hanno valore logico T, e quindi $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ha valore logico T, lo stesso di $p \iff q$;
  - p e q hanno lo stesso valore logico F. Automaticamente, entrambe le implicazioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ hanno valore logico T, e quindi di nuovo $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ha valore logico T.
- Supponiamo ora che $p \iff q$ abbia valore logico F (l'altro caso possibile!). Ciò vuol dire che p e q devono avere valori logici differenti, T per una e F per l'altra (altrimenti il valore logico di $p \iff q$ sarebbe T, non F!). Assumiamo che sia p ad avere valore logico T, e q ad avere valore F (nel caso opposto, si ragiona allo stesso modo). Allora l'implicazione $q \Rightarrow p$ ha valore T, ma l'implicazione $p \Rightarrow q$ è falsa. Perciò $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ha valore logico F, lo stesso di $p \iff q$.

Siamo così certi che la proposizione $p \iff q$ è equivalente logicamente alla proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. E' per questo motivo che si chiama *bicondizionale*: è la congiunzione delle proposizioni condizionali $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ (che può essere riscritta $p \Leftarrow q$). □

Quanto svolto nell'esercizio fornisce un modo generale (anche se non l'unico!) di verificare velocemente se due proposizioni sono equivalenti o meno, controllando separatamente le due implicazioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Più dettagliatamente, se p e q sono proposizioni assegnate, per provare che $p \iff q$ è vera (ha valore logico T)

(1) prima si prova che è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$;
(2) poi si prova che è vera l'implicazione $q \Rightarrow p$;
(3) a questo punto, siccome $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ è una proposizione vera, possiamo concludere che $p \iff q$ (equivalente ad essa) è vera, cioè che p e q sono proposizioni equivalenti

(questo metodo di dimostrare un'equivalenza logica è detto dimostrazione per *doppia implicazione*).

Warning! In Matematica, il termine *provare* non vuol dire *tentare*, ma quasi l'esatto contrario: dimostrare, con certezza e senza ambiguità o atti di fede. Di nuovo un'interferenza causata dal linguaggio naturale che, nei meno attenti, causa sovente errori pacchiani!

Vediamo un esempio di dimostrazione di un'equivalenza logica:

Esempio 4.10. Provare che, se a è un numero reale, allora

$$a \geqslant 0 \iff \text{l'equazione } x^2 - a = 0 \text{ ammette soluzioni reali.}$$

Procediamo per doppia implicazione: detta p la proposizione $a \geqslant 0$ e q la proposizione *l'equazione* $x^2 - a = 0$ *ammette soluzioni reali*, prima dimostriamo $p \Rightarrow q$, e poi $q \Rightarrow p$. Fatto ciò, possiamo affermare di aver dimostrato che $p \iff q$ è vera, cioè che le proposizioni (diverse!) p e q sono logicamente equivalenti.

$\boxed{p \Rightarrow q}$: se $a \geqslant 0$ sappiamo che esiste un (unico!) numero reale $b := \sqrt{a} \geqslant 0$ tale che $b^2 = a$. Sostituendo a x il numero b, si ha $b^2 - a = a - a = 0$, e quindi b è una soluzione reale dell'equazione, per cui effettivamente l'equazione $x^2 - a = 0$ ammette soluzioni reali (ne abbiamo trovata almeno una!);

$\boxed{p \Leftarrow q}$: se l'equazione $x^2 - a = 0$ ammette soluzioni reali, vuol dire che esiste almeno un numero reale c che ne sia soluzione, cioè tale che $c^2 - a = 0$. Per il primo principio di equivalenza tra uguaglianze, ciò è equivalente a $c^2 = a$, e quindi $a \geqslant 0$, perchè il quadrato di un numero reale è non negativo. $\square$

5. Negazioni

Come per le operazioni tra numeri reali, così tra gli operatori logici intercorrono varie relazioni. Per esempio, le operazioni $+$ e $\cdot$ sono commutative, e lo stesso vale per gli operatori $\vee$ e $\wedge$: qualunque siano le proposizioni a e b, le proposizioni $a \wedge b$ e $b \wedge a$ sono equivalenti; lo stesso si può dire per le proposizioni $a \vee b$ e $b \vee a$. Invece sappiamo che l'operatore $\Rightarrow$ non è commutativo: $a \Rightarrow b$ e $b \Rightarrow a$ non sempre sono equivalenti. In effetti, sono moltissime le relazioni che intercorrono tra gli operatori logici, e non è nostro compito esaminarle tutte in queste note.

Una cosa che invece intendiamo approfondire in qualche misura sono le relazioni che intercorrono tra l'operatore di negazione $\neg$ e gli altri operatori logici. Infatti, è inutile sapere che una data proposizione è falsa, se non sappiamo dire esplicitamente cosa ciò comporta. D'altra parte, nel linguaggio corrente la negazione inciampa negli altri costrutti, ed è spesso causa di scivoloni interpretativi (rileggere l'esercizio 8). Facciamo un altro piccolo esempio:

Esempio 5.1. Se la frase *Non fumare non fa male* afferma il falso, la sua negazione afferma il vero. La domanda perciò è: qual è la negazione della precedente frase?

Sono certo che qualcuno avrà risposto *Fumare fa male*: questo perchè saranno scattati due meccanismi automatici nel rispondere nel linguaggio corrente

- trattando il *non* come se fosse un segno $-$, mettendoci un altro *non* si cancellano entrambi e si ottiene *Fumare fa male*;
- siamo abituati al concetto che *Fumare fa male*; questo è verissimo, ma attingere a un concetto comune per rispondere a una questione specifica è un tipico errore di interferenza del linguaggio (e del contesto comune) in qualcosa di puramente concettuale.

Inoltre, sarà passato probabilmente inosservato che sì, nella frase in esame ci sono due *non*, ma svolgono ruoli diversi! A un'analisi più attenta, chi è il soggetto della frase? Il *Non fumare* – l'atto del non fumare. Se vogliamo costruire la negazione della frase, non dobbiamo cambiare il soggetto, per cui la negazione comincerà necessariamente con *Non fumare*. Dopodichè, diventa subito chiaro che la negazione corretta della frase data è *Non fumare fa male*, e dev'essere vera!

Questo stride con quel che è la verità scientifica conclamata ormai da decenni e incontestabile, ma è l'unica coerente con le nostre ipotesi: se la frase *Non fumare* *non fa male* è falsa, allora la sua negazione, che precisamente è *Non fumare fa male*, deve essere vera. L'unica attinenza con la realtà è che, come abbiamo detto, SE la frase data è falsa, allora la negazione è vera; in effetti, la frase data NON è falsa, ma vera: *Non fumare non fa male*, davvero.

Una piccola sottolineatura: dire che *Non fumare non fa male* e dire che *Non fumare fa bene* sono due cose diverse. Per convincersi, se non mi pesto un dito con un martello non mi procuro dolore, ma se prima avevo mal di testa non è che il non martellarmi un dito mi faccia stare meglio di come stavo prima!

Vediamo allora quali sono le proprietà dell'operatore di negazione, che è così semplice e così delicato nell'interazione con gli altri operatori:

Lemma 5.2. (Proprietà di $\neg$)

(1) *l'operatore $\neg$ è involutorio: qualunque sia la proposizione p, le proposizioni p e $\neg(\neg p)$ sono equivalenti;*

(2) *le relazioni tra gli operatori $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ sono regolate dalle leggi di De Morgan: se p, q sono proposizioni qualunque,*
- *$\neg(p \vee q)$ è equivalente a $(\neg p) \wedge (\neg q)$;*
- *$\neg(p \wedge q)$ è equivalente $(\neg p) \vee (\neg q)$;*

(3) *se p, q sono proposizioni qualunque, le proposizioni $\neg(p \Rightarrow q)$ e $p \wedge (\neg q)$ sono equivalenti.*

Giacchè gran parte del lavoro che facciamo è orientato non solo alla comprensione e alla scrittura, ma anche ad aquisire la capacità di esporre i propri argomenti in modo preciso e rigoroso, inseriamo per la prima volta in queste note una giustificazione oggettiva a quanto affermato or ora:

Dimostrazione.
(1) Il fatto che $p \iff \neg(\neg p)$ segue subito dalla definizione di *equivalenza logica*: p e $\neg(\neg p)$ hanno sempre lo stesso valore di verità, indipendentemente dal valore logico di p. Questo è reso più evidente dalla costruzione della tavola di verità della proposizione di $\neg(\neg p)$:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

(2) Proviamo che $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee \neg(q)$ usando le tavole di verità, come nel punto precedente. Si ha

$\neg(p \wedge q)$	$p \wedge q$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
F	T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T

Allo stesso modo si prova che $\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$.
(3) Anche il fatto che $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a $p \wedge (\neg q)$ può essere dimostrato tramite la scrittura delle tavole di verità. Tuttavia, a scopo didattico, diamo una dimostrazione che utilizza la definizione di *equivalenza logica* ma senza scrivere le tavole. Per comodità, chiamiamo a la proposizione composta $\neg(p \Rightarrow q)$, e chiamiamo b la proposizione (pure composta) $p \wedge (\neg q)$.

- Proviamo che $a \Rightarrow b$: sappiamo che se a ha valore logico F, allora $a \Rightarrow b$ ha valore logico T, indipendentemente dal valore logico di b. Resta da vedere cosa succede se a ha valore logico T. In tal caso, dire che a, cioè $\neg(p \Rightarrow q)$, è vera vuol dire che $\neg a$, cioè $p \Rightarrow q$, è falsa (ricordare che, per il punto (1),

$\neg(\neg(p \Rightarrow q))$ è equivalente a $p \Rightarrow q$), e ciò accade precisamente quando p ha valore logico T e q ha valore logico F. In tal caso, possiamo calcolare il valore logico di b, cioè di $p \wedge (\neg q)$, che è T. Perciò $a \Rightarrow b$ ha valore logico T; cioè, a implica b.

- Proviamo che $b \Rightarrow a$: di nuovo, se b ha valore logico F l'implicazione ha valore logico T, e basta concentrarci sul caso in cui b abbia valore logico T. Ciò vuol dire che tanto p che $\neg q$ hanno valore logico T, e quindi p è vera e q è falsa. Da ciò calcoliamo il valore logico di a, cioè quello di $\neg(p \Rightarrow q)$: poichè p è vera e q è falsa, il valore logico di $p \Rightarrow q$ è F, e quindi $\neg(p \Rightarrow q)$ ha valore logico T. Pertanto, anche l'implicazione $b \Rightarrow a$ è vera.

Siccome sia $a \Rightarrow b$ che $b \Rightarrow a$ sono vere, le proposizioni a e b sono logicamente equivalenti. □

Osservazione 5.3. A parte l'ovvia proprietà involutoria di $\neg$, spesso sinteticamente (e grossolanamente) riassunta dalla frase *una doppia negazione afferma*, sicuramente le Leggi di De Morgan sono le relazioni che più di frequente intervengono nel formare la negazione di una proposizione composta. Il loro funzionamento è semplice: per negare la congiunzione o la disgiunzione di p e q si prendono le negazioni di p e q, e si scambia congiunzione con disgiunzione.

La terza relazione l'abbiamo dimostrata in dettaglio, ma esprime anch'essa una cosa molto semplice: negare l'implicazione $p \Rightarrow q$ (cosa che di solito si denota con $p \nRightarrow q$ piuttosto che con $\neg(p \Rightarrow q)$, e si legge p non implica q), vuol dire asserire che p è vera e q no (cioè che $p \wedge (\neg q)$ è vera). Questo sarà rilevante in seguito.

***Esercizio* 18.** Abbiamo detto che il sistema degli operatori $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ è un sistema funzionalmente completo, cioè ogni proposizione può essere ottenuta componendo delle proposizioni più semplici tramite gli operatori suddetti.

Ora: $p \Rightarrow q$ è una proposizione composta, perciò deve esser possibile esprimerla tramite le sole operazioni $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ (nel senso: deve esser possibile scrivere una proposizione equivalente ad essa che usa solo gli operatori logici di base).

Provateci!

***Esercizio* 19.** Se x è un numero reale, affermare che

$$-1 \leqslant x \leqslant 7$$

vuol dire affermare che $(x \geqslant -1) \wedge (x \leqslant 7)$.
Qual è la sua negazione?

Svolgimento. Ora conosciamo le leggi di De Morgan, e non ci dovrebbero esser problemi a costruire la negazione in termini di equivalenza logica:

$$\begin{aligned}\neg(-1 \leqslant x \leqslant 7) &\iff \neg\Big((x \geqslant -1) \wedge (x \leqslant 7)\Big)\\ &\iff \Big(\neg(x \geqslant -1)\Big) \vee \Big(\neg(x \leqslant 7)\Big) \quad \text{(per le leggi di De Morgan)}\\ &\iff (x < -1) \vee (x > 7).\end{aligned}$$

6. Tecniche dimostrative di base

Gran parte del lavoro in Matematica consiste nell'affermare che, date certe ipotesi, si hanno necessariamente certe altre conseguenze. In pratica, ciò vuol dire affermare che certe implicazioni $p \Rightarrow q$ sono vere. Ovviamente, il solo affermarlo non basta a garantire che siano vere, e vanno dimostrate: bisogna cioè provare che l'implicazione $p \Rightarrow q$ ha valore logico T. Per farlo, basta limitarsi a dimostrare che se p ha valore logico T allora anche q deve avere valore logico T: infatti contemplare il caso in cui p è falsa non è significativo (perchè, quale che sia il valore logico di q, la proposizione $p \Rightarrow q$ ha in tal caso valore logico T).

Il primo tentativo da fare è procedere direttamente a far vedere che *se p è vera allora necessariamente q è vera*. Questa tecnica dimostrativa viene chiamata, perciò, *dimostrazione diretta*. Diamo un esempio:

***Esercizio* 20.** *Siano a, b, u, v numeri interi. Se a e b sono entrambi multipli di 3, allora anche $au + bv$ è un multiplo di 3.*

Svolgimento. Chiamiamo p la proposizione *a e b sono multipli di* 3 e q la proposizione *$au + bv$ è un multiplo di* 3. L'esercizio afferma che $p \Rightarrow q$, per cui dobbiamo dimostrare che quest'implicazione ha valore logico T. Come detto, basta supporre che sì, sia a che b sono multipli di 3, e far vedere che necessariamente anche il numero $au+bv$ è un multiplo di 3. Possiamo procedere con una (semplice) dimostrazione diretta:

- dire che a è un multiplo di 3 vuol dire che esiste un opportuno numero intero h per il quale risulti $a = 3h$;
- dire che b è un multiplo di 3 vuol dire che esiste un opportuno numero intero k (non è detto che coincida con il numero h determinato in precedenza!) per il quale si possa scrivere $b = 3k$.

Guardiamo ora al numero $au + bv$: anche se non conosciamo u e v, si ha

$$au + bv = (3h)u + (3k)v = 3(hu) + 3(kv) = 3(hu + kv).$$

Poichè il numero $hu + kv$ è il risultato della somma tra il prodotto uh e il prodotto kv tra numeri interi, anche $hu + kv$ è un numero intero, ed è tale che $au + bv = 3(hu + kv)$; cioè, $au + bv$ è un multiplo di 3.

Abbiamo così fatto vedere che se p è vera, necessariamente q è vera, e quindi ciò basta per dire che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera. □

Dimostrare un'implicazione tramite una dimostrazione diretta è, in linea di principio, la migliore scelta possibile: non solo è un argomento espositivo molto semplice (non a caso, si chiama *diretta*!), ma spesso dà anche le indicazioni necessarie a costruire esplicitamente una procedura (un algoritmo) utile per risolvere problemi che coinvolgono l'implicazione dimostrata (nell'esercizio di prima, ci dice come fare a scrivere $au + bv$ come multiplo di 3).

Tuttavia, non sempre affrontare qualcosa direttamente è la strategia migliore: può essere che la strada diretta sia troppo complicata, o che non ci sia affatto! Vedremo perciò brevemente due strategie alternative, entrambe abbastanza comuni, per effettuare una dimostrazione in modo indiretto. Cominciamo con la *dimostrazione per contrapposizione*:

Definizione 6.1. Siano p e q proposizioni, e consideriamo la proposizione composta $p \Rightarrow q$;

- la proposizione $q \Rightarrow p$ si dice il *converso* della proposizione $p \Rightarrow q$;
- la proposizione $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ si dice la *forma contrappositiva* di $p \Rightarrow q$.

Già abbiamo notato che la proposizione $p \Rightarrow q$ e il suo converso sono in genere logicamente differenti; per ciò che riguarda la forma contrappositiva, invece, si ha

***Esercizio* 21.** *Date le proposizioni p e q, le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ sono equivalenti.*

Basta costruire la tavola di verità della forma contrappositiva di $p \Rightarrow q$ e confrontarla con la tavola di verità di $p \Rightarrow q$ (lo si faccia, però!) □

Talvolta, per dimostrare che una implicazione $p \Rightarrow q$ è vera, può essere più conventiente dimostrare, al suo posto, che è vera $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ (la sua forma contrappositiva) perchè magari è più semplice. Questa tecnica viene chiamata *dimostrazione per contrapposizione*

Warning: si badi bene però di non confondere la forma contrappositiva di $p \Rightarrow q$ con il *converso* della stessa! $q \Rightarrow p$ NON è, in genere, equivalente a $p \Rightarrow q$!

Vediamo un esempio pratico di dimostrazione per contrapposizione:

***Esercizio* 22.** *Sia n un intero positivo. Provare che se $2^n - 1$ è un numero primo allora n è un numero primo.*

Svolgimento. Chiamiamo

- p la proposizione $2^n - 1$ è un numero primo;
- q la proposizione n è un numero primo.

Dobbiamo dimostrare che l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera. Tuttavia, se supponiamo p vera (cioè: se supponiamo che $2^n - 1$ sia un numero primo) sfruttare quest'informazione per far vedere che q è necessariamente vera (cioè: che n stesso è un numero primo) appare alquanto problematico.

Cambiamo strategia: facciamo vedere che $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$, cioè che se n NON è un numero primo ($\neg q$ è vera) allora necessariamente $2^n - 1$ NON è un numero primo (cioè: $\neg p$ è vera). Stiamo provando a usare la tecnica di dimostrazione per contrapposizione.

Ora: dire che n non è primo vuol dire che dobbiamo poterlo scrivere come $n = ab$, per opportuni numeri interi $a, b \geqslant 2$. Allora $2^n = 2^{ab} = (2^a)^b$ (per le proprietà delle potenze). Dal prodotto notevole $x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + x + 1)$, sostituendo alla lettera x il valore 2^a si ottiene

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^a + 1).$$

Dato che $a \geqslant 2$ risulta che $2^a - 1$ e $2^{a(b-1)} + \cdots + 1$ sono entrambi $\geqslant 2$, per cui $2^n - 1$ è un numero composto (cioè: non è un numero primo), e la proposizione $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ ha valore logico T. Poichè essa è la forma contrappositiva della proposizione $2^n - 1$ è primo $\Rightarrow$ n è primo, anche quest'ultima è vera. □

Osservazione 6.2. A sottolineare ancora una volta la differenza tra *converso* di un'implicazione e *forma contrappositiva* della stessa, notiamo che il converso dell'implicazione appena dimostrata è invece FALSO. Cioè: $q \not\Rightarrow p$. Infatti, il converso $q \Rightarrow p$ vuol dire *se n è un numero primo $\Rightarrow$ $2^n - 1$ è un numero primo*, e questo è falso: se $n = 11$ si ha $2^{11} = 23 \cdot 89$, per cui n è primo (q ha valore logico T) ma $2^n - 1$ no (p ha valore logico F), cioè $q \Rightarrow p$ è falsa. □

Dagli esempi dati sinora, sembra che il valore logico di una proposizione composta (p.es.: quello di $p \Rightarrow q$) cambia automaticamente al cambiare del valore logico delle componenti. Non è sempre così: può capitare che proposizioni composte risultino sempre vere, o sempre false, indipendentemente dal valore logico delle loro componenti più semplici.

***Esercizio* 23.** *Determinare il valore logico della proposizione*

$$\Big((p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))\Big) \wedge (\neg p)$$

in dipendenza dei valori logici di p e q.

Svolgimento. In sostanza, l'esercizio ci chiede solo di scrivere la tavola di verità della proposizione considerata. Si ha

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge (\neg q)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$	$\Big((p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))\Big) \wedge (\neg p)$
T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Si noti che, anche se i valori logici di p e q variano, il valore logico della proposizione assegnata è invariabilmente F. □

Definizione 6.3. Una proposizione composta il cui valore logico è sempre T è detta una tautologia; una proposizione composta il cui valore logico è sempre F è detta una contraddizione.

Ad esempio, la proposizione $p \vee (\neg p)$ è una tautologia e, di conseguenza, la sua negazione $p \wedge (\neg p)$ è una contraddizione.

Chiarito cosa si debba intendere con *contraddizione*, esaminiamo una terza strategia dimostrativa che viene adoperata molto frequentemente (e, ahimè, molto spesso nel modo sbagliato), basata sul fatto che siccome i possibili valori logici di una proposizione sono due, se uno dei due non può essere assunto allora il valore logico della proposizione deve forzatamente essere l'altro. La tecnica che esaminiamo si chiama *dimostrazione per assurdo*:

- dobbiamo dimostrare che $p \Rightarrow q$ è vera, ma invece di procedere direttamente o per contrapposizione
- supponiamo che l'implicazione sia FALSA (cioè che $p \not\Rightarrow q$ sia vera), e
- cerchiamo di evidenziare il manifestarsi di una contraddizione.

Se ci riusciamo, ne consegue che l'implicazione $p \Rightarrow q$ non può essere falsa, e quindi è vera. Operativamente,

(1) assumere che $p \not\Rightarrow q$ è equivalente a dire che $p \wedge \neg q$ è vera: cioè che è vera sia p che $\neg q$ (negazione della tesi);
(2) al termine di una catena di deduzioni, si arriva a concludere che p è falsa;
(3) poichè p dev'essere contemporaneamente vera (per *ipotesi*) che falsa (per *deduzione*), si che $p \wedge (\neg p)$ ha valore logico T, mentre non può ($p \wedge (\neg p)$ è una contraddizione!).

Osservazione 6.4. Una cosa importante da tener presente è che la rappresentazione schematica della dimostrazione per assurdo appena data è, appunto, *schematica*: per esempio, se l'ipotesi consiste nella frase n è un numero pari, NON E' DETTO, in realtà, che per arrivare a un assurdo dobbiamo per forza arrivare a far vedere che n è dispari. Per esempio, potrebbe capitare che dall'ipotesi n è pari e negando la tesi si arrivi a dedurre che $0 > 1$. Possiamo ugualmente considerare conclusa la dimostrazione per assurdo? La risposta è: Sì, anche se non è quello che ci saremmo aspettato seguendo <u>alla lettera</u> lo schema precedente!

Il fatto è che l'ipotesi $0 < 1$ può essere <u>aggiunta</u> all'ipotesi di partenza n è pari ottenendo un'ipotesi equivalente a quella di partenza: dato che $0 < 1$ è una proposizione vera, l'ipotesi $(0 < 1) \wedge (n \text{ è pari})$ è logicamente equivalente all'ipotesi n è pari (verificare, please!), per cui se negando la tesi arriviamo alla conclusione che $0 > 1$ possiamo dire che abbiamo raggiunto un assurdo.

In pratica, in un ragionamento per assurdo, la cosa importante è partire dal fatto che si assumono vere tanto p quanto $\neg q$: quando si arriva a un'affermazione palesemente falsa al termine di una sequenza di implicazioni logiche (p.es.: $0 > 1$, oppure $2 = -2$ o chissà cos'altro) lo scopo è stato raggiunto ugualmente. □

Warning! Le dimostrazioni per assurdo sono uno strumento potente, ma da usare con cautela: non sono *costruttive*, ed è frequente usarle nel modo sbagliato (p.es.: negando l'ipotesi invece della tesi, o confondendola con la forma contrappositiva).

***Esercizio* 24.** *Provare che se a, b sono interi dispari allora ab è dispari.*

Svolgimento. Procediamo per assurdo: supponiamo che ci siano due numeri dispari a, b tali che ab non sia un numero dispari (neghiamo cioè la tesi). Allora ab è pari, cioè un multiplo di 2. Poichè a è dispari, deve esistere un intero k che permetta di scrivere $a = 2k + 1$. Allora $ab = (2k + 1)b = 2kb + b$, che (per le leggi di equivalenza sulle uguaglianze) equivale a $b = ab - 2kb$. Poichè $ab, 2kb$ sono entrambi pari, anche $ab - 2kb = b$ è pari. D'altra parte, avevamo supposto che b fosse dispari! Contraddizione.

Ciò vuol dire che se a e b sono entrambi dispari allora ab non può non essere dispari, perchè ciò porterebbe al verificarsi di una contraddizione (cioè che b dev'essere contemporaneamente pari e dispari): la dimostrazione per assurdo ha raggiunto il suo scopo. □

7. Variabili, indeterminate, incognite, parametri

Frequentemente, in un'espressione matematica compaiono simboli (p.es.: $\sin(\pi/4)$, $\log 15$, $x^2+y^2 = 1$,...) che coinvolgono lettere dell'alfabeto, romano o greco. *P.es.:* x, y, z, α, β, γ, ...

A volte esse formano l'abbreviazione di una parola che designa un concetto (es.: sinh sta per *seno iperbolico*, arctan sta per *arcotangente*), e si aggiungono a una quantità di altri simboli, più astratti (es.: $\surd$, $\oint$, ∂).

Altre volte, ed è di questo che stiamo per discutere, esse vengono usate come simboli in sè stesse (p.es.: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$), e svolgono il ruolo di *elemento generico*: prima o poi, al posto di tali lettere potremo sostituire degli enti matematici (numeri, funzioni, insiemi, etc) e quel che abbiamo ottenuto per elementi generici di un certo tipo continuerà a valere in particolare quando essi verranno rimpiazzati da elementi particolari di quel tipo.

A seconda del contesto e degli scopi per cui vengono introdotte, le lettere presenti in una scrittura matematica prendono un nome particolare.

- **Variabili**: Se abbiamo più valori da considerare e da inserire in una stessa formula, invece di scrivere per ciascuno di essi l'espressione e il risultato che genera, usiamo una o più lettere e scriviamo sinteticamente la formula in cui le lettere svolgono il ruolo di elementi generici. In tal caso, le lettere introdotte sono chiamate *variabili*.

  Per esempio, quando abbiamo detto *Date le proposizioni* p, q*, diciamo* $p \vee q$ ... stiamo usando le lettere p, q come variabili, nelle quali possiamo sostituire tutte le proposizioni che ci possono venire in mente.

  Oppure, quando disegniamo il grafico della parabola $y = 2x^2$, le lettere x e y sono variabili: per la precisione, x è la variabile *indipendente*, che facciamo variare tra tutti i numeri reali, e per ciascuno di tali valori si ottiene un valore della variabile *dipendente* y.

  Warning: Se usiamo la lettera x come variabile, dobbiamo specificare dove facciamo variare x, o la scrittura perde senso.
- **Indeterminate**: A volte usiamo le lettere come elementi puramente generici, anche se non abbiamo valori particolari che ci interessa sostituire.

  Per esempio, se scriviamo il *polinomio* $x^2 + 3x - 4$, la lettera x è usata come *indeterminata*: possiamo anche sostituire a x un numero, ma non è nei nostri obiettivi immediati. Questo è quel che facciamo quando consideriamo i prodotti notevoli, e scriviamo le uguaglianze
  - $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
  - $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
  - $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
  - $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

  eccetera.

  Per esempio, ancora, possiamo scrivere che $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, pur non avendo alcun valore che intendiamo sostituire al posto della x. In tutti questi casi, trattiamo la lettera x e la lettera y come *indeterminate*.

D'altra parte, poichè la scrittura $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ vale per un elemento generico (l'indeterminata x), essa resta valida anche quando a x sostituiamo un numero (e trattiamo x una variabile).

Per esempio, per calcolare $10^2 + 30 - 4$ basta calcolare $(10 + 4)(10 - 1) = 14 \cdot 9 = 126$.

Osservazione 7.1. Una lettera usata come indeterminata non ha bisogno della specificazione di dove deve variare.

Ci serve piuttosto sapere quale *tipo* di oggetto rappresenta, cioè di cosa è un elemento generico.

Per esempio, se x, y rappresentano numeri reali, la regola $xy = yx$ è valida; se invece rappresentano matrici no.

- **Incognite** Un'equazione o un sistema è un modo sintetico per dire Problema: dato questo, per quali valori tra quelli disponibili questo è valido? I valori da determinare sono rappresentati da una o più lettere che, per questo motivo, sono dette *incognite*.

  P.es: nella scuola secondaria *Risolvere l'equazione* $x^2 - 3x = 2$ riassumeva sinteticamente la frase Problema: determinare i numeri reali il cui quadrato diminuito del triplo del numero stesso è pari a 2. Qui, la lettera x *svolge il ruolo* di incognita del problema.

  Warning: Un'equazione non è ben posta se non si specifica dove vanno cercate le soluzioni! Nella scuola secondaria, il tacito assunto è che le si cerca tra i numeri reali. Non dev'essere per forza così: l'equazione $2x = 3$ può essere posta sui soli numeri interi, e in tal caso NON ha soluzioni: 3 è dispari, e i valori per x sono da cercare solo tra i numeri interi (per cui $2x$ è necessariamente pari).
- **Parametri**: Talvolta invece di un singolo ente matematico si considerano tanti oggetti, dello stesso tipo, distinti tra di loro da un "*tag*" che, con poca fantasia ma molta efficacia, si rappresenta con una lettera. Tale lettera prende allora il nome di *parametro*.

  Per esempio, al variare di c tra i numeri reali, la scrittura $y = 2x + c$ rappresenta non una, ma infinite rette del piano cartesiano, tutte parallele tra loro. Qui, x e y sono considerate variabili, e c è un *parametro*: a ciascun valore del parametro corrisponde esattamente una di quelle rette.

  Oppure, al variare di c tra i numeri interi pari, l'*equazione posta sui numeri reali* $xy - c = 0$ rappresenta non una, ma infinite equazioni di secondo grado nelle due incognite x ed y sull'insieme dei numeri reali: una per ogni valore del parametro c (che varia tra i soli numeri interi pari).

  Anche un parametro, per aver senso, deve avere ben specificato il suo range (campo di variabilità).

8. Predicati

Consideriamo la scrittura $(x > 1) \wedge (x < 2)$: possiamo dire che è una proposizione? Penso che a questo punto nessuno possa avere dubbi sulla risposta: NO! Il problema è che non sappiamo chi rappresenti x, per cui allo stato attuale non solo non possiamo attribuire un valore di verità a quella scrittura ma, peggio, non dice nemmeno qualcosa di compiuto: è una "frase appesa", in attesa di essere completata a una proposizione, non appena venga specificato qualcosa di più preciso sulla *variabile* x che in essa compare. Quella scrittura è un esempio di ciò che chiamiamo *predicato (della variabile* x*)*. Più precisamente,

Definizione 8.1. Un'affermazione p che coinvolge una variabile è detta un *predicato*. Il range in cui può variare la variabile è detto l'*ambito del discorso*.

Nell'esempio qui sopra, se specifichiamo che $x = 2$, la scrittura diventa $(2 > 1) \wedge (2 < 2)$, che è una proposizione e ha valore di verità F; se $x = 1.5$, si ottiene un'altra proposizione, $(1.5 > 1) \wedge (1.5 < 2)$, che ha valore di verità T. D'altra parte, potremmo essere interessati a completarla non sostituendo a x un singolo valore, ma tutto un range di valori (per esempio, per x che varia in tutto l'insieme dei numeri reali). Stiamo cioè specificando l'ambito del discorso. Ci basta questo? No, non ancora.

Specificare l'ambito del discorso è essenziale, ma è anche essenziale specificare in che modo la variabile varia nell'ambito. Tipicamente, ciò consiste nel dare una *quantificazione* della variabilità.

Esempio 8.2. Specificare che x deve variare tra i numeri reali non basta a rendere $(x > 1) \wedge (x < 2)$ una proposizione, perchè ancora non è possibile decidere se è vera o falsa:

- per tutti gli x risulta $(x > 1) \wedge (x < 2)$ è effettivamente una proposizione, ed è FALSA. Infatti non è vero che prendendo un qualunque numero reale da sostituire ad x si ottiene una proposizione vera: per $x = 1$ si ottiene una proposizione falsa;
- esiste un x per il quale risulta $(x > 1) \wedge (x < 2)$ è effettivamente una proposizione, ed è VERA: basta esibire $x = 1.5$ per avere un numero reale in corrispondenza del quale la proposizione è vera;
- di conseguenza, dire solo che *l'ambito del discorso per x è l'insieme dei numeri reali* non rende la scrittura una proposizione.

Il modo in cui si specifica come la x può variare nell'ambito del discorso si chiama *quantificazione*, e in realtà ci sono due tipiche quantificazioni che si incontrano nella quasi totalità dei casi: detto $p(x)$ un predicato che coinvolge la variabile x

- $\exists$ – Quantificatore esistenziale: per dire che esiste almeno un valore per x nell'ambito del discorso per il quale vale il predicato $p(x)$ si scrive $\exists x$ tale che $p(x)$ (o anche, direttamente, $\exists x\, p(x)$: il *tale che* resta sottinteso).
- $\forall$ – Quantificatore universale: per dire che per ogni valore di x nell'ambito del discorso vale il predicato $p(x)$ si scrive $\forall x\ p(x)$.

C'è, per la verità, anche una forma rafforzata del quantificatore universale, il quantificatore $\exists!$: dire che $\exists! x\ p(x)$ vuol dire che esiste esattamente un valore di x nell'ambito del discorso per il quale vale il predicato $p(x)$, e combina il senso della quantificazione $\exists$ (esistenza di almeno un valore per x) con un'affermazione di unicità (non può essercene più di uno).

Esempio 8.3. La proposizione l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$ ammette una radice reale è una proposizione (vera), che possiamo riformulare in un modo più chiaro ed esplicito:

$$\exists\ x \text{ numero reale tale che } x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Infatti, scegliendo $x = -1$ si prova la veridicità della proposizione.

La forma rafforzata della proposizione precedente

$$\exists!\ x \text{ numero reale tale che } x^2 + 3x + 2 = 0$$

è invece falsa: a parte il valore $x = -1$ esibito prima, anche $x = -2$ soddisfa $x^2 + 3x + 2 = 0$. Perciò viene meno l'unicità, affermata in $\exists!$.

Cambiare la quantificazione cambia il senso della frase: in effetti anche

$$\forall\ x \text{ numero reale } x^2 + 3x + 2 = 0$$

è una proposizione falsa! Nel linguaggio corrente, la si leggerebbe *qualunque sia il numero reale x risulta* $x^2 + 3x + 2 = 0$, il che è falso. Per esempio: 0 è un numero reale, ma per $x = 0$ si ha $0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$.

Esempio 8.4. La proposizione $\sqrt{2}$ è un numero razionale è una proposizione (FALSA), che per quanto chiara e sintetica può essere resa più chiara ed evidente. Cosa vuol dire, più estesamente, quella proposizione?

$$\exists a \text{ numero intero, } \exists b \text{ numero intero non nullo, tali che } a/b = \sqrt{2}$$

o, più sinteticamente,

$$\exists\, a, b \text{ numeri interi, con } b \neq 0, \text{ tali che } a/b = \sqrt{2}.$$

Warning: Il fatto che la parte esistenziale sia *nascosta* nell'affermazione $\sqrt{2}$ è un numero razionale è una cosa da notare: questo tipo di situazione è molto frequente.

Per evitare di specificare sempre a parole gli ambiti, si usano dei simboli a indicare i più comuni insiemi numerici. Senza entrare nemmeno di striscio nella questione di come questi insiemi vadano correttamente introdotti, per i nostri scopi ci appoggiamo a quelle che sono le comuni nozioni di scuola secondaria, e introduciamo dei simboli solo con lo scopo di accorciare le locuzioni (in accordo con le notazioni usualmente adottate su tutti i libri):

- $\mathbb{N}$ – l'insieme dei numeri *naturali*, cioè i numeri 0, 1, 2, ...;
- $\mathbb{Z}$ – l'insieme dei numeri *interi*, cioè i numeri $\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$;
- $\mathbb{Q}$ – l'insieme dei numeri *razionali*, cioè le frazioni a/b dove a, b sono numeri interi e $b \neq 0$;
- $\mathbb{R}$ – l'insieme dei numeri *reali*, cioè l'insieme che comprende i numeri razionali, gli irrazionali algebrici come $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ... e i numeri trascendenti come π, e,....

  $\mathbb{R}$ costituisce l'insieme numerico su cui sono basati i programmi di Matematica della scuola secondaria superiore;

e si usa il simbolo $\in$ (e rispettivamente il simbolo $\notin$) per indicare l'appartenenza (e rispettivamente la non appartenenza) di un oggetto a uno di tali insiemi. P.es.: per dire x è un numero razionale si scrive $x \in \mathbb{Q}$; per dire che x è un numero reale irrazionale si scrive $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x \notin \mathbb{Q})$.

L'ultimo esempio, perciò, si scrive sinteticamente, in simboli, come

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \iff \exists a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0, \text{ tali che } a/b = \sqrt{2}.$$

L'aver introdotto predicati e quantificatori rende pienamente effettiva la notazione sviluppata: adesso sì che ogni frase Matematica può essere compiutamente espressa con chiarezza e precisione. Ciò non altera il senso degli operatori logici $\vee$ e $\wedge$, nè il senso dell'implicazione, perchè si tratta solo di ampliare il modo di scrivere una proposizione; l'unico operatore per il quale è bene dare qualche indicazione aggiuntiva è il solito: la negazione, quella cioè che sappiamo essere più "fragile" nella gestione. Essenzialmente, per negare una proposizione in cui compaiono predicati e quantificatori, bisogna solo osservare che

La negazione scambia i quantificatori, e poi agisce come al solito:

- $\neg(\forall x\, p(x))$ è equivalente a $\exists x\, \neg p(x)$;
- $\neg(\exists x\, p(x))$ è equivalente a $\forall x\, \neg p(x)$.

Esempio 8.5. Qual è la negazione di Tutti i numeri pari sono positivi?

- Fissiamo l'ambito del discorso: l'insieme dei numeri interi, cioè $\mathbb{Z}$
- costruiamo i predicati $p(x)$: x è pari, $q(x)$: x è positivo
- la proposizione data è esprimibile come $\forall x \in \mathbb{Z}\ (p(x) \Rightarrow q(x))$
- la negazione è $\exists x \in \mathbb{Z}$ tale che $\neg(p(x) \Rightarrow q(x))$, cioè $\exists x \in \mathbb{Z}$ tale che $p(x) \wedge (\neg q(x))$, cioè c'è almeno un numero pari $\leqslant 0$

Esercizio 25. *Sia A l'insieme di tutti gli animali (ambito del discorso), e fissiamo i predicati $p(x)$: x è un leopardo e $q(x)$: x ha le macchie.*

(1) *Cosa vogliono dire le proposizioni*
$$\forall x \in A\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \text{ e } \forall x \in A\ (p(x) \wedge q(x))?$$
(2) *Quali sono le loro negazioni?*

Svolgimento. La scrittura blu vuol dire *qualunque sia l'animale x, se è un leopardo allora ha le macchie*, che possiamo sintetizzare in *tutti i leopardi hanno le macchie*. La sua negazione si ottiene subito, ed è

$$\exists x \in A\ \neg(p(x) \Rightarrow q(x)) \text{ cioè } \exists x \in A\ p(x) \wedge \neg(q(x)),$$

che a parole può essere resa con *esiste almeno un leopardo senza macchie*.

La scrittura rossa invece vuol dire *qualunque sia l'animale x, è un leopardo ed ha le macchie*, cioè *tutti gli animali sono leopardi con le macchie*. La negazione è

$$\exists x \in A\, \neg(p(x) \wedge q(x)) \text{ cioè } \exists x \in A\, \neg(p(x)) \vee \neg(q(x)),$$

che a parole può essere espresso con *c'è almeno un animale che non è un leopardo oppure non ha le macchie*. □

Torniamo a un esercizio che avevamo lasciato in sospeso (o meglio, non avevamo esaminato a fondo), precisamente l'esercizio 8:

Esercizio 26. *Se p è la proposizione* Tutte le macchine italiane sono fatte male, *qual è la sua negazione?*

Svolgimento. L'ambito del discorso sia l'insieme di tutte le macchine, M; consideriamo i predicati $a(x)$: *x è italiana* e $b(x)$: *x è fatta male*. Allora la proposizione p si esprime come
$$\forall x \in M\ (a(x) \Rightarrow b(x)).$$
Ora sappiamo costruire la sua negazione: è $\exists x \in M\ a(x) \wedge \neg(b(x))$, che tradotta in linguaggio corrente si legge *C'è almeno una macchina italiana che non è fatta male*, o anche *Non tutte le macchine italiane sono fatte male*. Nell'elenco proposto nell'esercizio 8, perciò, la risposta corretta era la (4). Occhio: ciò non vuol dire che c'è una macchina italiana che sia fatta bene... □

Vediamo qualche esercizio aggiuntivo per chiarirci meglio le idee:

Esercizio 27. Si consideri l'affermazione *Non c'è nave senza ancora*. Da questa affermazione deduciamo che

(1) qualche nave ha almeno un'ancora;
(2) nessuna nave ha due ancore;
(3) qualche nave non ha l'ancora.
(4) ogni nave ha almeno un'ancora.

Svolgimento. La proposizione di partenza dichiara che non esistono navi senza ancora. Affermare ciò equivale ad affermare che ogni nave ha almeno un'ancora (non può avere zero ancore, per cui ne deve avere almeno una, ma magari anche due o più), ovvero l'affermazione (4).

L'affermazione (1) può essere dedotta dalla proposizione di partenza: se ogni nave ha almeno un'ancora, allora la (1) è necessariamente vera. Però, la (1) *non è equivalente* alla proposizione iniziale: la (1) lascia aperta la possibilità che potrebbero esistere navi con almeno un'ancora ed altre senza nemmeno un'ancora, cosa contraria all'affermazione di partenza.

L'affermazione (2) non può essere dedotta dalla proposizione di partenza: dire che nessuna nave ha due ancore include tanto il caso di navi con una ancora, quanto il caso di navi con 3 ancore, quanto ancora il caso di navi con zero ancore! Questo va contro quanto affermato nella proposizione iniziale.

L'affermazione (3) non può essere dedotta dalla proposizione di partenza, perchè afferma che esistono navi senza ancora, contrariamente all'affermazione iniziale.

Possiamo "formalizzare", in realtà, ciascuna delle affermazioni dell'esercizio: sia $a(x)$ il numero di ancore di x, e $p(x)$ il predicato $a(x) = 0$. L'ambito di x è l'insieme V delle navi. Perciò, se $x \in V$ (se x è una nave), dire che x non ha ancore vuol dire $a(x) = 0$. Allora l'affermazione di partenza è

$$\neg(\exists x \in V \quad p(x)),$$

che sappiamo essere equivalente a $\forall x \in V\ a(x) \neq 0$. Dato che il numero di ancore della nave x ($a(x)$) non può certo essere negativo, ciò è a sua volta equivalente all'affermazione $\forall x \in V\ a(x) \geqslant 1$. Questa è la forma equivalente alla proposizione originale, e si riconosce la forma corrispondente alla proposizione (4). Per la cronaca, per le altre proposizioni dell'elenco si hanno le forme

(1) $\exists x \in V\ a(x) \geqslant 1$
(2) $\forall x \in V\ a(x) \neq 2$ (e quindi può essere $a(x) = 0$, o $a(x) = 1$, o $a(x) \geqslant 3$);
(3) $\exists x \in V\ a(x) = 0$.

Probabilmente, ciò rende ancora più evidente che la proposizione originale è non solo differente dalla (1), dalla (2) e dalla (3), ma che mentre la (1) può essere dedotta dalla proposizione iniziale, la (2) e la (3) no. □

***Esercizio* 28.** Si consideri la proposizione *Ogni giorno c'è il sole*; qual è la sua negazione?

(1) tutti i giorni c'è il sole.
(2) tutti i giorni non c'è il sole.
(3) esiste un giorno in cui c'è il sole.
(4) esiste un giorno in cui non c'è il sole.

Svolgimento. La negazione corrisponde alla proposizione Non è vero che ogni giorno c'è il sole, ovvero che non è vero che tutti i giorni c'è il sole. Questo equivale a dire che esiste qualche giorno in cui il sole non c'è. Attenzione, ciò non è equivalente a dire che il sole non c'è mai (non c'è tutti i giorni), ma solo che esiste un giorno in cui non c'è. Pertanto la negazione è la proposizione (4).

La proposizione (1) è equivalente alla affermazione di partenza, quindi non ne è la negazione. La proposizione (2) non è equivalente alla negazione dell'affermazione iniziale, perchè troppo restrittiva: equivale ad affermare che il sole non c'è mai, mentre nella negazione si afferma che c'è almeno un giorno in cui il sole non c'è. Anche la proposizione (3) non è equivalente alla negazione cercata: dire che c'è almeno un giorno in cui il sole non c'è (la negazione della proposizione iniziale) non esclude che potrebbe accadere che tutti i giorni il sole non c'è, per cui potrebbe non esistere affatto un giorno in cui ci sia il sole.

Possiamo formalizzare l'affermazione iniziale e ciascuna delle proposizioni della lista: prendendo come ambito del discorso l'insieme dei giorni, in cui far variare la variabile x, consideriamo il predicato $p(x)$: il giorno x c'è il sole. Allora l'affermazione iniziale è $\neg(\forall x\ p(x))$, che sappiamo essere equivalente a

$$\exists x\ \neg p(x),$$

cioè (appunto) esiste almeno un giorno in cui il sole non c'è. Le affermazioni della lista possono essere espresse come segue:

(1) $\forall x\ p(x)$;
(2) $\forall x\ \neg p(x)$;
(3) $\exists x\ p(x)$;
(4) $\exists x\ \neg p(x)$,

supportando formalmente (e più chiaramente) quel che avevamo capito discorsivamente. □

Esercizio 29. Si consideri la proposizione: *Esiste un numero reale strettamente positivo*. Qual è la sua negazione?

(1) Esiste lo zero;
(2) Tutti i numeri non sono strettamente positivi;
(3) Tutti i numeri sono non negativi;
(4) Esiste un numero non strettamente positivo.

Svolgimento. Stavolta procediamo direttamente con il convertire le frasi assegnate nel linguaggio formale che abbiamo sviluppato: l'ambito del discorso è $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali, e consideriamo il predicato $p(x) : x > 0$. L'affermazione iniziale è perciò $\neg(\exists x \in \mathbb{R}\; p(x))$, che sappiamo essere equivalente alla proposizione $\forall x \in \mathbb{R}\; \neg(p(x))$. Dato che $\neg(x > 0)$ vuol dire $x \leqslant 0$, la negazione dell'affermazione iniziale è $\forall x \in \mathbb{R}\; x \leqslant 0$.

Ora vediamo le varie proposizioni della lista:

(1) $\exists 0 \in \mathbb{R}$: è certamente vera, ma non c'entra nulla con la proposizione iniziale;
(2) $\forall x \in \mathbb{R}\;\; \neg(x > 0)$: è precisamente questa la negazione di *ogni numero reale è strettamente positivo*. Il fatto che sia FALSA non ci deve interessare: non cercavamo una proposizione che fosse vera, ma la negazione di una proposizione assegnata. Il fatto che la proposizione iniziale sia vera (esistono numeri reali positivi, i numeri 1, 2, $\sqrt{3}$, π ne sono esempi) rende automatico che la sua negazione sia falsa, non ci deve nè sorprendere nè far dubitare su quale debba essere!
(3) $\forall x \in \mathbb{R}\; \neg(x < 0)$: anche questa è falsa, perchè vuol dire $\forall x \in \mathbb{R}\; (x \geqslant 0)$, mentre -1 è un numero reale e $-1 < 0$; non basta però il fatto che sia falsa a renderla la negazione della proposizione iniziale: quest'ultima afferma che per ogni numero reale x si ha $x \leqslant 0$, non $x \geqslant 0$;
(4) $\exists x \in \mathbb{R}\; (x \leqslant 0)$: questa proposizione è vera, ma ciò non la rende la negazione della proposizione iniziale.

□

Abbiamo per semplicità considerato sinora predicati in una sola variabile, ma non c'è motivo di sottostare a questa restrizione: possiamo avere predicati in un numero qualunque di variabili! Le cose importanti per poter passare da *predicati* a vere *proposizioni* sono le seguenti:

- Per ogni variabile deve essere specificato un ambito e una quantificazione
  Altrimenti, il predicato resta un predicato, non diventa una proposizione.
- Il senso della proposizione dipende dall'ordine con cui sono introdotte le variabili

Per il resto, si procede come per predicati di una singola variabile.

Esempio 8.6. Partiamo dal predicato (di due variabili) $p(x, y)$: $x + y = 0$. La sola quantificazione $\forall x \in \mathbb{Z}$ non rende la frase $\forall x \in \mathbb{Z}\,(x + y = 0)$ una proposizione: resta un predicato nella variabile y, di cui non conosciamo nè l'ambito nè la quantificazione.

Invece $\forall x \in \mathbb{Z}\; \exists y \in \mathbb{Z}\,(x + y = 0)$ è davvero una proposizione (con valore logico T), che vuol dire *per ogni numero intero x esiste un numero intero y che sommato ad x dà come risultato* 0. Una formulazione più stringente (attingendo a un linguaggio più specializzato) è *ogni numero intero ha un opposto.*

Se vogliamo costruire la sua negazione, procediamo come nel caso di una variabile: l'operatore $\neg$ passa da sinistra verso destra e cambia tutti i quantificatori che incontra. Nello specifico,

$$\neg\,(\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\,(x+y=0)) \text{ equivale a } \exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ (x+y \neq 0),$$

e cioè *Esiste almeno un intero x che non ha opposto.* □

Questo per ciò che riguarda la prima cosa importante (ambito e quantificazione) nel trattare predicati in due variabili. In cosa consiste la seconda cosa importante, quella che riguarda l'ordine?

***Esercizio* 30.** *Consideriamo il predicato $p(x, y)$: $x + y = 0$; è una scrittura simmetrica, ed è vero che non è importante se al posto di x scriviamo y e viceversa. Però:*

(1) *Cosa vuol dire la scrittura $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ p(x, y)$?*
(2) *Cosa vuol dire la scrittura $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ p(x, y)$?*
(3) *Le due proposizioni sono equivalenti?*

Svolgimento. La proposizione (1) vuol dire che per ogni numero reale x esiste il suo opposto, cioè un numero reale y tale che $x + y = 0$, ed è una proposizione vera. La (2), ottenuta dalla prima scambiando solo di posto le due quantificazioni, vuol dire che esiste un fantomatico numero reale y ($\exists y \in \mathbb{R}$) con questa curiosa proprietà: sommandolo a un qualunque numero reale x si ottiene sempre zero ($\forall x \in \mathbb{R}\ x + y = 0$), che è una cosa palesemente falsa. Infatti, se ciò fosse vero allora in particolare tanto per $x = 0$ quanto per $x = 1$ si dovrebbe avere $0 + y = 0$ e $1 + y = 0$. Ma allora $0 + y = 1 + y$ e, per la prima legge di equivalenza sulle uguaglianze, ciò equivale a dire che $0 = 1$, che è falso!

Di conseguenza, le scritture (1) e (2), che a un'occhiata superficiale (<u>molto</u> superficiale, in effetti!) sembrano la stessa cosa, in realtà sono due affermazioni molto diverse, e non equivalenti: la (1) ha valore logico T, la (2) valore logico F. □

Perciò, nel caso di predicati di più variabili, l'ordine con cui si quantificano le variabili è importante: cambiare l'ordine può alterare il senso della frase, come annunciato nel secondo punto delle cose importanti per predicati di più variabili.

Facciamo qualche esercizio concreto:

***Esercizio* 31.** Stabilire se la proposizione

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \ \text{ tale che } x + y - 5 = 0$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Svolgimento. Qui il predicato $p(x, y)$ è $x + y - 5 = 0$, l'ambito del discorso tanto per x quanto per y è $\mathbb{N}$, per cui la proposizione è

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ p(x, y).$$

Esplicitamente, essa afferma che per ogni scelta di un elemento x nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è sempre possibile trovare un elemento y, ancora nell'insieme dei numeri naturali, tale che la somma (algebrica) $x+y-5$ sia nulla. Pertanto, una volta scelto l'elemento x, è necessario trovare un elemento $y \in \mathbb{N}$ tale che $x + y - 5 = 0$. A causa della prima legge di equivalenza sulle uguaglianze, ciò equivale a richiedere che $y = 5-x$, e non è affatto detto che esista un siffatto numero <u>naturale</u> y <u>per ogni</u> $x \in \mathbb{N}$. Per esempio, esiste un opportuno $y \in \mathbb{N}$ se $x = 4$ (precisamente, $y = 1$), ma NON esiste se $x = 10$: non c'è nessun numero naturale che sottratto a 5 dia 10 (il numero $x = -5$ andrebbe bene, ma $-5 \notin \mathbb{N}$!). Pertanto la proposizione è falsa.

La negazione della proposizione è:

$$\exists x \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } \forall y \in \mathbb{N}\ x + y - 5 \neq 0,$$

ed è automaticamente vera (essendo la negazione di una proposizione falsa).

Si noti che lo stesso esempio usato per far vedere che la proposizione originale è falsa ($x = 10$) può essere usato per far vedere che la negazione è vera. □

***Esercizio* 32.** Stabilire se la proposizione

$$\forall c \in \mathbb{Q} \quad \exists d \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } cd = 5$$

è vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

Svolgimento. Il predicato $p(x, y)$ qui è $xy = 5$, l'ambito delle variabili è $\mathbb{Q}$, e la proposizione originale è $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q}\ p(x, y)$. Il fatto che si siano usate le *lettere* c, d invece che le *lettere* x, y per denotare le variabili del predicato non sposta di una virgola le considerazioni in merito: l'usare i simboli x e y per denotare le variabili, o le incognite di un'equazione è solo un'abitudine, ma la cosa importante è riconoscere le variabili come tali. In parole povere: bisogna non farsi "confondere" da simboli diversi da quelli che ci si aspettava! Per uniformità, perciò, in questo svolgimento da ora in poi useremo i simboli usati nella traccia come nomi per le due variabili.

Veniamo alla decisione sul valore logico della proposizione: è vero che per ogni numero razionale c esiste un numero razionale d tale che $cd = 5$? La risposta è quasi sempre sì: lo è per esempio se $c = 1$ (basta prendere $d = 5$), o se $c = 2$ (basta prendere $d = 5/2$). Più in generale, se $c \neq 0$, per la seconda legge di equivalenza sulle uguaglianze, l'uguaglianza $cd = 5$ è equivalente all'uguaglianza $d = 5/c$. Fa eccezione un solo caso: $c = 0$. In tale caso, infatti, qualunque sia $d \in \mathbb{Q}$, si ha $0d = 0 \neq 5$. Un solo caso, ma sufficiente a rendere FALSA l'affermazione: non è vero che per ogni $c \in \mathbb{Q}$ esiste un opportuno $d \in \mathbb{Q}$ per il quale $cd = 5$, perchè in corrispondenza di $c = 0$ NON esiste alcun numero razionale che moltiplicato per esso dia 5.

La negazione della proposizione di partenza è

$$\exists c \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } \forall d \in \mathbb{Q} \quad cd \neq 5.$$

Chiaro che essa sia vera; d'altra parte, il fatto che è vera può essere mostrato direttamente esibendo $c = 0$. □

***Esercizio* 33.** Stabilire se la proposizione

$$\forall c \in \mathbb{Q},\ c \neq 0 \quad \exists d \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } cd = 5$$

è vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

Svolgimento. Usando la stessa logica dell'esercizio precedente, si ha stavolta che "cancellato" il numero razionale 0 che invalidava il *per ogni*, per tutti i rimanenti elementi basta prendere $d = 5/c$ per avere un numero razionale che soddisfa $cd = 5$, per cui questa proposizione è vera.

La sua negazione è

$$\exists c \in \mathbb{Q},\ c \neq 0 \quad \text{tale che } \forall d \in \mathbb{Q} \quad cd = 5,$$

ed è questa a essere falsa, stavolta. □

***Esercizio* 34.** Stabilire se la proposizione

$$\exists v \in \mathbb{Q}, \text{ tale che } \forall u \in \mathbb{Q} \quad vu = 5$$

è vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

Svolgimento. L'affermazione è palesemente falsa: dice che esiste un numero razionale v che, moltiplicato per ogni numero razionale, dà invariabilmente 5. Quindi, in particolare, dovrebbe essere vero che $v \cdot 0 = 5$, cosa che è falsa. La sua negazione è

$$\forall v \in \mathbb{Q}, \quad \exists u \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } vu \neq 5,$$

che è vera (per esempio, basta prendere $u = 0$: funziona con tutte le scelte di v).□

***Esercizio* 35.** Stabilire se la seguente proposizione

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad a = 2c^2 + 4b^4$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Svolgimento. Questa volta, il predicato coinvolge tre variabili (a, b e c), e precisamente è $a = 2c^2 + b^4$. L'ambito di tutte e tre le variabili è $\mathbb{R}$. Nella formulazione della traccia, sono state omesse del tutto le parole del linguaggio corrente; precisamente, le parole *tale che* e *risulta*, perchè sono sottintese dalla scrittura formale. Volendole reinserire, basta seguire il flusso delle quantificazioni, e precisamente scriveremmo

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall b \in \mathbb{R} \text{ risulta } a = 2c^2 + 4b^4.$$

Cosa dice questa proposizione? Che scelto arbitrariamente un numero reale a esiste un opportuno numero reale c tale che, qualunque sia un ulteriore numero reale b, vale l'uguaglianza $a = 2c^2 + 4b^4$. E' vera o falsa? Notiamo che se fosse vera, allora non dovrebbero esserci numeri reali negativi: dato che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ il numero $2x^2 + 4y^4$ è sempre maggiore o uguale a zero, ciò vale in particolare quando al posto di x c'è il numero c "determinato" (in qualche modo) da a e al posto di y c'è un qualunque numero reale b. Poichè però questo deve valere anche per $a = -1$, si avrebbe che $-1 \geqslant 0$, il che è falso. Perciò, la proposizione data è falsa.

La sua negazione è vera, ed è

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a \neq 2c^2 + 4b^4.$$

Se volessimo mostrare direttamente che quest'ultima è vera (cioè, *senza* usare il fatto che la proposizione originale è falsa), basterebbe fissare $a = -1$ per scoprire che per qualunque $c \in \mathbb{R}$ basta prendere $b = 0$ per avere $-1 \neq 2c^2 + 4b^4 = 2c^2$: infatti, $2c^2 \geqslant 0$ non può essere uguale a -1, numero negativo. □

***Esercizio* 36.** Stabilire se la seguente proposizione

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad 2ay = n$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Svolgimento. Come nell'esercizio precedente, abbiamo un predicato di tre variabili: le variabili sono a, y e n, il predicato $p(a, y, n)$ è $2ay = n$, ma gli ambiti delle variabili sono diversi: è $\mathbb{N}$ per la variabile a, $\mathbb{Z}$ per le variabili y e n. Di nuovo, non abbiamo riportato le parole *tale che* e *risulta*, dettate implicitamente dall'espressione formale.

Cosa dice la proposizione? Dice che fissato un qualunque intero non negativo a, esiste un intero y (quindi, potenzialmente negativo) tale che *per qualunque* intero n risulti vero che $2ay = n$. Di nuovo, questa proposizione è falsa: il primo membro dell'uguaglianza è un numero pari, per cui basta prendere un numero n dispari per esser certi che l'uguaglianza non può esser verificata. Per fornire però un esempio completo, basta prendere $a = 1$ e $n = 1$: può esistere un intero $y \in \mathbb{Z}$ tale che $2y = 1$? Certo che no! Perciò la proposizione è falsa. La sua negazione è

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \qquad 2ay \neq n,$$

essa è vera perchè negazione di una proposizione falsa, ma se vogliamo far vedere che è vera direttamente basta usare precisamente $a = 1$ e $n = 1$, lo stesso esempio usato per mostrare che la proposizione della traccia era falsa. □

***Esercizio* 37.** Stabilire se la seguente proposizione

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{Z} \qquad y - r + b \neq 0$$

è vera o falsa, ed esibire la sua negazione.

Svolgimento. La proposizione coinvolge tre variabili, y, r e b, che hanno ambiti diversi (rispettivamente $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$), ed il predicato $y - r + b \neq 0$. Essa afferma che esiste almeno un numero reale y tale che, qualunque siano il numero naturale r e il numero intero b, risulta $y - r + b \neq 0$. Per il primo principio di equivalenza per le uguaglianze, ciò è equivalente a dire che $y \neq r - b$. Perciò, la proposizione è vera: basta scegliere $y = 1/2$, numero razionale ma NON intero, per rendersi conto che qualunque siano $r \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Z}$ risulta $1/2 \neq r - b$. Infatti, $r - b$ magari non sarà un numero naturale, ma certamente è un numero intero, mentre $1/2$ non lo è.

La negazione della proposizione di partenza è perciò falsa, ed è

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{Z} \qquad y - r + b = 0.$$

Lo stesso esempio di prima ($y = 1/2$) basta a far vedere direttamente che il suo valore di verità è F. □

Esercizio 38. Stabilire se la proposizione

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad z = x^2 - y^3$$

è vera o falsa, e scriverne la negazione.

Svolgimento. Qui la proposizione è costruita sul predicato $z = x^2 - y^3$ delle variabili z, x, y, tutte reali. E' vera o falsa? Assegnati arbitrariamente i numeri reali z e x, il problema è decidere se davvero esiste un opportuno $y \in \mathbb{R}$ tale che l'uguaglianza $z = x^2 - y^3$ sia valida: se un tale y esiste, la proposizione è vera, altrimenti è falsa. Per il primo principio di equivalenza per le uguaglianze, affermare che $z = x^2 - y^3$ è equivalente ad affermare che $y^3 = x^2 - z$. Ora: $x^2 - z$ è un numero reale, e una delle proprietà dei numeri reali consiste nel fatto che

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \exists! v \in \mathbb{R} \quad v^3 = u.$$

E' consuetudine denotare questo unico elemento v con il simbolo $\sqrt[3]{u}$, e lo chiamiamo la radice terza di u:[4] a differenza della radice quadrata, il fatto che u sia positivo o negativo non influenza il fatto che esista $\sqrt[3]{u}$, e che ci sia esattamente un solo numero reale che elevato alla terza dia u.

Nel nostro caso, perciò, basta prendere $y = \sqrt[3]{x^2 - z}$ per avere un numero reale tale che $y^3 = x^2 - z$, quali che siano le scelte effettuate per x e z. Perciò, la proposizione è vera. La sua negazione è falsa, ed è

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad z \neq x^2 - y^3.$$

Il fatto che sia falsa può essere verificato anche direttamente: in corrispondenza dei due numeri z ed x la cui esistenza è affermata dall'ultima proposizione, consideriamo il numero reale (che esiste certamente) $y = \sqrt[3]{x^2 - z}$. Si ha allora che $x^2 - y^3 = x^2 - (x^2 - z) = z$, contrariamente a quanto affermato dalla proposizione. □

Esempio 8.7. Torniamo al primissimo esempio presentato in queste note: l'affermazione

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \left(\left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta \Rightarrow |\cos x| < \varepsilon \right).$$

Ora dovremmo essere in grado di leggerla e comprenderla: intanto, l'ambito (in parte sottinteso) è $\mathbb{R}$, ci sono due predicati in tre variabili x, δ, ε, precisamente

$$p(x, \delta, \varepsilon): \; \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta \qquad \text{e} \qquad q(x, \delta, \varepsilon): \; |\cos x| < \varepsilon,$$

e la proposizione completa (con le opportune quantificazioni) è

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; (p(x, \delta, \varepsilon) \Rightarrow q(x, \delta, \varepsilon)),$$

[4] nel corso degli studi universitari, capiterà di dover lavorare con i numeri complessi invece che con quelli reali, e l'uso dell'articolo determinativo verrà meno!

che detta a parole recita *per ogni reale positivo ε esiste un reale positivo δ tale che per ogni numero reale x se la distanza (euclidea) di x da $\pi/2$ è minore di δ, allora il valore assoluto di* $\cos x$ *è minore di ε.*

Non è importante capire ORA se questa frase è importante in Matematica e perchè (questo è parte dello studio della Matematica): qui abbiamo cominciato a introdurre il linguaggio della Matematica, e per i nostri scopi essere riusciti a comprendere con precisione cosa si intendesse con quella sequenza di simboli astratti, che l'ordine con cui sono scritti è importante, e che essenzialmente è una sequenza di quantificazioni cui segue un'implicazione logica (di cui ora conosciamo il senso), è tutto quello cui potevamo ambire.

Per i curiosi che però non hanno ancora seguito un corso di Analisi Matematica, quella frase vuol dire

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Parte 2. Insiemistica

9. Insiemi

La nozione matematica di *insieme* è una delle nozioni più di base e pervasive che ci siano. E' talmente di base che è persino difficile spiegarla in modo più semplice: con *insieme* si intende una qualunque *collezione* di *oggetti* ben specificata; tali oggetti si dicono gli *elementi dell'insieme*, o i suoi *membri*. Con le parole *ben specificata* si intende che dato un oggetto arbitrario deve essere possibile decidere in modo assoluto se esso è uno dei membri dell'insieme o no.

Esempio 9.1.

(1) Possiamo considerare l'insieme formato dai numeri $1, 2, 3, 4$, e lo denotiamo con A. Questa collezione è ben specificata: dato un qualunque oggetto, possiamo controllare se esso è un membro dell'insieme o no. Per esempio, il numero 1 è uno dei membri di A, mentre il numero 5 no.

(2) Possiamo considerare l'insieme delle persone nate nell'anno 2000, e lo denotiamo con B. Anche questo è un insieme, perchè è ben specificato: se prendiamo un oggetto che non sia una persona, esso NON è membro dell'insieme B, mentre se prendiamo una persona, basta controllare il suo anno di nascita per dire se è uno dei membri di B oppure no.

(3) Possiamo considerare l'insieme delle persone alte più di un metro e ottanta, e lo chiamiamo C. Ancora una volta, questo è un insieme: un cavallo non è un membro di C perchè non è una persona, il numero 3 nemmeno, e invece se prendiamo una persona basta controllare la sua altezza per decidere se è un membro di C o meno.

(4) Possiamo considerare l'insieme D costituito delle persone alte più di un metro e ottanta *e* nate nell'anno 2000: dovrebbe esser chiaro che è un insieme, e ciascuno dei suoi membri è anche un membro tanto dell'insieme B quanto dell'insieme C. D'altra parte, un uomo nato nel 2000 ma alto 1,79m è nell'insieme C ma non è membro dell'insieme D; così pure, una donna alta 1.81m ma nata nel 2001 è membro di C ma non di D.

(5) Possiamo considerare "l'insieme" delle persone simpatiche. Ciò ci può sembrare forse naturale nel linguaggio comune, ma a ben guardare questo non è un *insieme* vero: il riconoscere una persona come simpatica o meno è soggettivo, e quindi questo non è un insieme perchè non è ben specificato.

(6) Più o meno come nel caso precedente, l'insieme *delle persone alte* non è un vero insieme: in base a quale criterio si decide che una persona è *alta*? Si noti che completando in qualche modo la frase, per esempio con *delle persone alte 1.60m*, si ha invece un insieme nel senso vero e proprio.

Non esiste, in realtà, un modo di esprimere il concetto di *insieme* in modo *non circolare*: dire collezione, gruppo, raccolta vuol dire usare parole differenti che esprimono lo stesso concetto, in qualche modo primitivo, innato, quello di insieme. L'unica precisazione in più, per quel che ci riguarda, è che a differenza del senso comune della parola *insieme*, per noi un insieme deve essere ben specificato, per cui l'insieme *delle persone alte 1.70m* è un insieme, mentre quello *delle persone alte*, o quello *delle persone simpatiche* no. C'è, in effetti, un'altra parola di cautela da spendere prima di usare troppo liberamente la parola *insieme*, come vedremo a breve; tuttavia, ci toccherà solo marginalmente.

In genere, un insieme viene denotato usando una lettera maiuscola dell'alfabeto romano, per cui si parlerà degli insiemi A, B, C, etc; invece, gli elementi di un insieme vengono denotati usando lettere minuscole dell'alfabeto, per esempio $a, b, c, \ldots$. Non è obbligatorio, e spesso le lettere greche sostituiscono quelle romane; tuttavia, usare maiuscole per gli insiemi e minuscole per gli oggetti aiuta a capire a colpo d'occhio la natura di un elemento simboleggiato da una lettera. Inoltre, per dire che l'oggetto a è membro dell'insieme A si usa il simbolo $\in$ (che vuol dire appartenenza), si scrive $a \in A$ e si legge a appartiene ad A; la negazione di ciò, cioè il fatto che l'oggetto a non è membro di A, si scrive invece $a \notin A$ e si legge a non è in o non appartiene ad A. Perchè A sia un insieme, quindi, per ogni dato oggetto x dev'esser vero o che $x \in A$ oppure che $x \notin A$: non entrambe le affermazioni, non nessuna di esse.

Una volta chiarito (in qualche modo) cosa si debba intendere con i termini *insieme, oggetto, appartenenza di un oggetto a un insieme*, poniamoci un'altra domanda: come *rappresentare* un insieme? Cioè: come facciamo a far capire a qualcun altro qual è l'insieme che abbiamo intenzione di considerare?

Per gli insiemi numerici più comuni e standard vengono usati simboli particolari, che abbiamo già introdotto parlando di Logica; diamo di nuovo il loro elenco:

- $\mathbb{N}$, insieme dei numeri *naturali*, cioè 0, 1, 2, ...;
- $\mathbb{Z}$, insieme dei numeri *interi*, cioè i numeri $\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$. I numeri naturali possono essere interpretati come numeri interi positivi (identificando per esempio 1, numero naturale, con $+1$, numero intero, etc);
- $\mathbb{Q}$, insieme dei numeri *razionali*, cioè le frazioni a/b dove a e b sono numeri interi e $b \neq 0$, ad esempio $-1/2, +3/4, \dots$. I numeri interi possono essere interpretati come numeri razionali con denominatore $+1$ (identificando per esempio -3, numero intero, con il numero razionale $(-3)/(+1) = -3/1$, etc);
- $\mathbb{R}$, insieme dei numeri *reali*, la cui introduzione è ancora più delicata che per i precedenti insiemi, e comprende tanto i numeri razionali quanto i numeri irrazionali, siano essi *algebrici* come $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{9}$ che *trascendenti* come π, e (numero di Nepero),...
- $\mathbb{C}$, insieme dei numeri *complessi*, cioè numeri della forma $a + ib$, dove a, b sono numeri reali e i (unità immaginaria) è un numero tale che $i^2 = -1$. L'utilizzo dei numeri complessi nel corso della scuola secondaria superiore è abbastanza raro, e di solito li si incontra (brevemente) trattando la risoluzione delle equazioni di secondo grado.

Per ciascuno di questi insiemi andrebbe specificata con esattezza la natura dei *numeri* che li costituiscono, ma per il momento può andare più che bene questa breve descrizione, che si rifà a quanto incontrato nel corso degli anni di scuola media superiore. La costruzione rigorosa degli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ verrà probabilmente incontrata nei corsi di Matematica Discreta o Algebra del primo anno di studi universitari, la costruzione rigorosa di $\mathbb{R}$ verrà sicuramente incontrata nei corsi di Analisi Matematica del primo anno di Università.

Quando l'insieme che dobbiamo introdurre non è uno degli insiemi standard della lista, ma è un insieme "piccolo", possiamo semplicemente elencarne gli elementi racchiudendoli tra le parentesi $\{, \}$: in generale, una parentesi aperta $\{$ indica che stiamo cominciando a scrivere un insieme, e l'apparire della parentesi chiusa $\}$ indica che la nostra descrizione dell'insieme è terminata. Quindi per esempio l'insieme costituito dai numeri $1, 2, 3, 4$ lo potremo indicare esplicitamente con $A := \{1, 2, 3, 4\}$. Qui

- A indica il nome (una lettera maiuscola) che intendiamo usare per l'insieme;
- il simbolo $:=$ indica che stiamo, di fatto, *"battezzando"* qualcosa (l'insieme) attribuendogli un nome (la A). E' utile scrivere $:=$ invece del solo simbolo $=$ per capire subito cosa stiamo facendo (è un'assegnazione, non un'uguaglianza);

- le parentesi $\{$ e $\}$ indicano rispettivamente l'inizio e la fine della descrizione di un insieme (e non di altri concetti);
- $1, 2, 3, 4$ è semplicemente la lista degli elementi (i membri) che costituiscono l'insieme che avevamo in mente.

Questo modo di rappresentare gli insiemi può funzionare quando appunto l'insieme è piccolo, ma non è molto efficiente nè economico: avessimo voluto considerare l'insieme di tutti i numeri interi tra 1 e 100 saremmo stati costretti a scrivere una lista molto lunga, quello dei numeri tra 1 e 100.000 una lista lunghissima, e se invece avessimo voluto considerare l'insieme dei numeri primi... semplicemente non avremmo potuto farlo!

Pensiamoci un attimo: è proprio necessario *elencare uno per uno* tutti gli elementi di un insieme per poter dire quale insieme abbiamo in mente?

A volte sì, se l'insieme è stato costruito senza un criterio evidente, quasi *"a caso"*. Per esempio, difficile dire quale sia stato il criterio con cui è stato costruito l'insieme $\{5, 7, \clubsuit, \circ, \Omega, u\}$.

Nella quasi totalità dei casi, però, quando avremo necessità di scrivere un insieme sarà perchè i suoi elementi sono accomunati da qualche proprietà particolare (per esempio: essere numeri primi). In tutti questi casi, basterà chiarire la proprietà che li accomuna per aver descritto bene l'insieme: preso un oggetto arbitrario x, x sarà un membro dell'insieme se e solo se x ne soddisfa la proprietà caratteristica. Perciò, la descrizione di un insieme A comporterà lo specificare una proprietà tramite un *predicato* $p(x)$ che al variare della *variabile* x nell'*ambito* del discorso ci dirà se l'oggetto x è o meno in A secondo che per quello specifico x la proposizione $p(x)$ è vera o, rispettivamente, falsa. La rappresentazione dell'insieme A individuato da una certa proprietà $p(x)$ per x che varia nell'ambito del discorso $\mathscr{D}$ avverrà con una scrittura del tipo

$$A := \{x \in \mathscr{D} \mid p(x)\},$$

che vuol dire *chiamiamo* A (la scrittura $A :=$) l'*insieme* (perchè incontriamo il simbolo $\{$) *costituito da tutti gli oggetti* x *dell'ambito del discorso* $\mathscr{D}$ (la scrittura $x \in \mathscr{D}$) *per i quali* (il simbolo $|$, che si legge *tale che*, e talvolta è sostituito dal simbolo equivalente :) *la proposizione* $p(x)$ *ha valore logico* T; l'ultima parentesi $\}$ chiude la descrizione dell'insieme. Facciamo subito un esempio:

Esempio 9.2. Vogliamo descrivere l'insieme di tutte le persone nate nell'anno 2000, e indicarlo con la lettera A. In linea di principio potremmo elencarle una per una, ma a parte che sarebbe una cosa lunghissima e impraticabile da fare, ci servirebbe veramente? No: l'insieme NON E' i suoi elementi, è qualcosa di nuovo, e l'unica cosa che di lui ci interessa è sapere chi ne fa parte e chi no, cioè poter decidere per ogni singolo oggetto (in questo caso: una persona) se esso è membro dell'insieme o meno. Perciò, fissato l'ambito del discorso $\mathscr{D}$ come l'insieme (!) delle persone, e detto $p(x)$ il predicato *x è nato nell'anno 2000*, possiamo scrivere $A := \{x \in \mathscr{D} \mid p(x)\}$. Eliminando i simboli non necessari, scriveremo

$$A := \{x \text{ persona } \mid x \text{ è nato nell'anno } 2000\}.$$

E' così diverso da quello che avevamo indicato direttamente, cioè l'insieme delle persone nate nell'anno 2000? No, affatto. Tuttavia, serve a illustrare la logica seguita nella scrittura di A utilizzando un *costruttore logico*, precisamente il predicato $p(x)$ di x.

Facciamo un esempio più interessante:

Esempio 9.3. Costruiamo l'insieme dei numeri interi pari. Il modo ingenuo di indicarlo è

$$A := \{\dots, -6, -4, -2, 0, +2, +4, +6, \dots\}$$

dove, siccome l'insieme è costituito da infiniti oggetti, abbiamo usato i puntini $\ldots$ per indicare, in qualche modo, che la breve lista $-6, -4, -2, 0, +2, +4, +6$ non è l'elenco completo degli oggetti di A. In realtà, abbiamo cercato ingenuamente di indicare la ***proprietà*** in base alla quale abbiamo costruito A. Similmente, avessimo voluto indicare l'insieme degli interi pari compresi tra 100.000 e -50.000, avremmo probabilmente scritto

$$B := \{-50.000, -49.998, -49.996, \ldots, -2, 0, +2, \ldots, +99.996, +99.998, +100.000\}$$

allo stesso scopo. Possiamo fare molto meglio di così! Ricordiamo che un numero n è *pari* se e solo se è un multiplo intero di $+2$, e questo vuol dire che esiste un numero intero k tale che $n = 2k$. Perciò, scriveremmo

$$\begin{aligned} A :=&\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = 2k\}, \\ B :=&\{n \in \mathbb{Z} \mid (-50.000 \leqslant n \leqslant -100.000) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = 2k)\}. \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo descritto completamente gli insiemi A e B, perchè abbiamo descritto esplicitamente la proprietà in base alla quale li abbiamo formati: non abbiamo bisogno di scorrere l'elenco completo degli elementi di A (che è pure infinito!) e di B per scoprire che $1/2 \notin A$ e $1/2 \notin B$, mentre $-50.002 \in A$ (perchè è pari!) e $-50.002 \notin B$ (perchè -50.002 è pari, ma < -50.000), o che $+25.872$ è tanto in A quanto in B. □

Esempio 9.4. Il concetto di *intervallo* è onnipresente nella Matematica della scuola secondaria superiore, in varie versioni: dati i numeri reali a e b, con $a \leqslant b$, scriviamo $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ per indicare degli insiemi particolari costituiti da numeri reali (l'ambito del discorso è $\mathbb{R}$) in un modo particolarmente conciso ed efficace. Per esempio:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}.$$

In pratica, a e b denotano l'*estremo inferiore* e l'*estremo superiore* dell'intervallo, e le parentesi quadre [,] dicono se essi sono membri dell'insieme o meno: $[a$ vuol dire $a \in$insieme, $]a$ invece vuol dire $a \notin$ insieme; per l'estremo superiore, se $b \in$insieme scriviamo $b]$. □

In effetti, ci possono essere anche altri modi, anche migliori, di spiegare *come* è costruito un insieme e che, a rigore, non rispettano la struttura $A := \{x \in \mathscr{D} \mid p(x)\}$. Uno molto usato è del tipo $A := \{r(x) \mid x \in \mathscr{R}\}$, dove

- $\mathscr{R}$ è il range di variabilità della variabile x;
- r è una *"regola"* che permette di costruire senza ambiguità un oggetto $r(x)$ corrispondente a un dato valore di x nel suo range di variabilità. Saremo più precisi in seguito sul senso da attribuire al concetto di *regola*;
- l'insieme A è ottenuto prendendo tutti gli oggetti $r(x)$ ottenuti facendo variare x in tutto $\mathscr{R}$.

Come sempre, un esempio vale più di mille parole:

Esempio 9.5. Abbiamo visto come scrivere l'insieme degli interi pari: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 2k\}$. Possiamo riscriverlo in un modo ancora più chiaro:

$$A := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Questa descrizione di A non è più della forma $\{x \in \mathscr{D} \mid p(x)\}$, ma del tipo $\{r(x) \mid x \in \mathscr{R}\}$. Nello specifico, la costruzione dice

A è l'insieme costituito da tutti i numeri $2k$ ottenuti facendo variare k tra i numeri interi in tutti i modi possibili.

In pratica, qui $\mathscr{R} = \mathbb{Z}$, e la *regola* r è quella che parte da $k \in \mathbb{Z}$ e costruisce $r(k) := 2k$.

Anche l'insieme B dell'esempio precedente può essere ottenuto in questo modo: osservato che se $-50.000 \leqslant 2k \leqslant +100.000$ equivale a richiedere che $-25.000 \leqslant k \leqslant +50.000$, si ha

$$B := \{2k \mid (k \in \mathbb{Z}) \wedge (-25.000 \leqslant k \leqslant +50.000)\}.$$

Il range può anche essere scritto più sinteticamente $\mathbb{Z} \ni k \in [-25.000, +50.000]$ (è un po' inusuale, ma corretto); invece, non possiamo evitare di indicare esplicitamente $k \in \mathbb{Z}$ e scrivere solo $k \in [-25.000, +50.000]$, perchè in tal caso faremmo variare k tra tutti i numeri <u>reali</u> nell'intervallo $[-25.000, +50.000]$, e quindi avremmo messo per esempio $2\sqrt{2}$ in A. □

Esistono anche altri modi per descrivere un insieme, meno comuni di quelli appena visti, e non è importante esaminarli tutti (questi due bastano e avanzano per la quasi totalità di casi). La cosa importante invece è capire che non è affatto necessario *elencare tutti gli elementi* di un insieme per descriverlo: basta *definire bene la proprietà in base alla quale selezioniamo i suoi elementi.* A volte, potremmo addirittura non essere nemmeno in grado di scrivere i suoi elementi singolarmente, ma lo stesso l'insieme sarebbe ben definito:

Esempio 9.6. L'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^7 - 3x^3 - 5 = 0\}$ è costituito da almeno un elemento, e per certo, da non più 7: queste affermazioni conseguono da argomenti che, al momento, non è il caso di esporre ma comunque abbastanza semplici in assoluto. Tuttavia, non siamo in grado di esibirne alcuno esplicitamente in modo elementare! Nonostante ciò, non solo A è ben definito, ma si può anche provare che in A ci sono esattamente 3 distinti elementi. □

C'è un insieme talmente particolare da richiedere un simbolo a parte:

Definizione 9.7. L'insieme $\varnothing := \{\quad\}$ è detto *insieme vuoto*.

La definizione data di $\varnothing$ è la più elementare, ma non l'unica: la proprietà che lo caratterizza è che qualunque sia l'oggetto x, è $x \notin \varnothing$, e può essere espressa in vari modi tutti buoni

$$\varnothing = \{x \in \mathbb{R} \mid a < a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\} = \dots$$

Non è importante *quale* tra le infinite possibilità scegliamo per definire $\varnothing$, la proprietà che lo caratterizza è che, ripetiamo, quale che sia l'oggetto x si ha $x \notin \varnothing$.

E' il momento di fare un po' di esercizi:

***Esercizio* 39.** Esibire almeno 5 elementi dell'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = 4k + 3\}.$$

Svolgimento. In linea di principio, gli elementi di A devono essere numeri interi, quindi potenzialmente anche negativi. In realtà, se $x \in A$, allora deve essere possibile scriverlo nella forma $x = 4k + 3$, dove k deve essere un opportuno numero naturale, dunque $k \geqslant 0$. Perciò è inutile cercare elementi di A tra i numeri interi negativi: poichè $k \geqslant 0$ si ha per forza $4k + 3 \geqslant 3$. Controlliamo questo valore: per $k = 0$ risulta effettivamente che $0 \cdot 4 + 3$ è un intero, è scritto nella forma $4k + 3$ (per $k = 0$, appunto), e dunque è in A. Ciò ci fa capire anche come trovarne subito altri: basta assegnare 5 valori distinti a k, scelti tra i numeri naturali, per ottenere altrettanti elementi di A. La scelta più ovvia è $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (cioè, scegliere per k gli elementi dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4\}$!) per ottenere i numeri $3, 7, 11, 15$ e 19, certamente elementi di A! □

***Esercizio* 40.** Elencare, se possibile, tutti gli elementi dell'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}.$$

Svolgimento. Gli elementi di A devono essere numeri reali, e precisamente quei numeri reali x per i quali il prodotto $(x-1)(x-2)$ vale 0. Dato che il prodotto tra numeri reali soddisfa la legge di annullamento del prodotto, questo vuol dire che o $x-1$ deve essere zero, o che deve esserlo $x-2$. Perciò o $x = 1$ oppure $x = 2$. Non ci sono altri numeri reali a soddisfare la proprietà che definisce A, per cui $A = \{1, 2\}$. $\square$

***Esercizio* 41.** Elencare esplicitamente tutti gli elementi dell'insieme

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 0) \wedge (x^2 = 3)\}.$$

Svolgimento. Gli elementi di A devono essere numeri reali ($x \in \mathbb{R}$) che soddisfano sia la richiesta $x > 0$ (cioè: x dev'essere positivo) che la richiesta $x^2 = 3$. In altri termini, x dev'essere la radice quadrata aritmetica (positiva) di 3. Dato che $3 > 0$, esiste esattamente una radice aritmetica di 3, che denotiamo con $\sqrt{3}$. Perciò, $A = \{\sqrt{3}\}$.

Va notato che se invece avessimo avuto $A' := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x > 0) \wedge (x^2 = 3)\}$, avremmo ottenuto l'insieme vuoto! Infatti, $\sqrt{3}$ è un numero *irrazionale*, cioè $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ e, dato che ogni numero razionale è in particolare un numero reale, e che $\sqrt{3}$ è l'unico numero reale positivo il cui quadrato è 3, non c'è alcun numero razionale positivo il cui quadrato è 3. $\square$

***Esercizio* 42.** Elencare almeno 5 elementi dell'insieme

$$A := \{\sqrt{x-1} \mid x \in [1, 2]\}.$$

Svolgimento. E' molto comodo scriverne non solo 5, ma quanti ne vogliamo, dato che gli elementi di A sono descritti in forma algoritmica: basta prendere 5 numeri reali $1 \leqslant x \leqslant 2$ e ottenere per ciascuno un elemento distinto di A. Per esempio, presi $1, 3/2, 5/4, 9/8, 17/16$ si hanno rispettivamente gli elementi $0, 1, 1/2, \sqrt{2}/4$ e $1/4$, tutti in A. $\square$

***Esercizio* 43.** *(Equazioni di primo grado)*
Quali sono le soluzioni dell'equazione $2x - 3 = 0$ in $\mathbb{R}$? In $\mathbb{Q}$? In $\mathbb{Z}$?

Svolgimento. Un'equazione è un modo sintetico per esprimere un problema, e risolverla vuol dire risolvere il problema che esprime. Qui il problema consiste nel determinare tutti i numeri x, rispettivamente in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{Z}$, tali che se sottraiamo 3 dal loro doppio otteniamo 0. In pratica, si tratta di scrivere esplicitamente (come lista) gli elementi degli insiemi

$$R := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-3 = 0\}, \quad Q := \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x-3 = 0\}, \quad Z := \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x-3 = 0\}.$$

Si comprende subito da queste scritture che, anche se l'equazione è la stessa ($2x-3 = 0$), gli insiemi R, Q e Z sono in linea di principio diversi! In effetti, usando i principi di equivalenza per le uguaglianze, possiamo determinare

$$2x - 3 = 0 \iff 2x = 3$$

e sia nel caso $x \in \mathbb{R}$ che nel caso $x \in \mathbb{Q}$ usando il secondo principio di equivalenza per le uguaglianze (moltiplicando ambo i membri per $1/2$) otteniamo $x = 3/2$. Dato che stiamo passando per problemi equivalenti, esso è anche l'unico numero soluzione dell'equazione data, e quindi $R = \{3/2\} = Q$.

Per ciò che riguarda Z, invece, NON possiamo moltiplicare ambo i membri per $1/2$ e sperare di ottenere un numero intero, perchè $1/2 \notin \mathbb{Z}$. In effetti, non c'è alcun numero intero che moltiplicato per 2 dia 3: quale che sia $k \in \mathbb{Z}$, $2k$ è un numero *pari*, mentre 3 è dispari. Perciò $Z = \varnothing$. $\square$

Quando abbiamo un'equazione, stiamo definendo un insieme: quello delle *soluzioni* dell'equazione. A volta questo insieme è finito, e se è "piccolo" siamo contenti di dare *esplicitamente* la lista dei suoi elementi (nel caso di prima, $3/2$ per R e Q, la lista vuota per Z); fatto ciò, abbiamo *risolto l'equazione*. Un altro esercizio:

***Esercizio* 44.** *(Equazioni di secondo grado)*
Risolvere le equazioni $2x^2 - 3x + 2 = 0$ e $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Svolgimento. Qui abbiamo un intoppo: DOVE cerchiamo le soluzioni delle equazioni date? Cioè: dobbiamo descrivere esplicitamente l'insieme delle soluzioni S_1 ed S_2 delle due equazioni, ma abbiamo il dubbio $S_1 := \{x \in ? \mid 2x^2 - 3x + 2 = 0\}$, e similmente per S_2. Nella scuola secondaria, il dubbio semplicemente non è stato nemmeno considerato: tacitamente, tutto ciò che facciamo si svolge nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, per cui ogni studente di scuola secondaria interpreterebbe l'esercizio come il dover determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni $S_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 2 = 0\}$, e va bene così. In molti casi, infatti, una volta assegnato il contesto di default, richieste particolari devono essere esplicitamente formulate, o è il contesto a dettare l'ambito del discorso.

Pertanto, assumiamo senz'altro che le soluzioni vanno cercate in $\mathbb{R}$. Dalla teoria delle equazioni di secondo grado, sappiamo che dobbiamo controllare il *Delta* per sapere se e quante soluzioni reali ci sono: se l'equazione generica di secondo grado è $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, il Delta è il numero $\Delta = b^2 - 4ac$. Qui, per la prima equazione si ha $\Delta = 9 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0$, e dunque (poichè è negativo) la prima equazione non ammette soluzioni, cioè $S_1 = \varnothing$. Per la seconda equazione si ha invece $\Delta = 49 - 4 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$, e quindi essa ammette due soluzioni distinte in $\mathbb{R}$. Sappiamo anche scriverle:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{7+5}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Quindi $S_2 = \{3, 1/2\}$.

E' tuttavia da rimarcare che se avessimo voluto le soluzioni delle stesse equazioni in $\mathbb{C}$, o in $\mathbb{Z}$, l'esito sarebbe stato alquanto diverso. □

Talvolta, un problema può ammettere un insieme delle soluzioni che è infinito:

***Esercizio* 45.** *(Disequazioni lineari)*
Risolvere la disequazione $3x - 2 < 4x + 7$.

Svolgimento. Applicando il primo principio di equivalenza per le disuguaglianze, riscriviamo quella data in forma equivalente ma più semplice:

$$\begin{aligned} 3x - 2 < 4x + 7 &\iff (3x-2) + (-7) < (4x+7) + (-7) \iff 3x - 9 < 4x \\ &\iff (3x-9) + (-3x) < (4x) + (-3x) \iff -9 < x, \end{aligned}$$

cioè la disequazione assegnata è equivalente alla disequazione, più semplice, $x > -9$. L'insieme delle sue soluzioni è evidente:

$$S := \{x \in \mathbb{R} \mid x > -9\},$$

che di solito denotiamo in forma sintetica con $S :=]-9, +\infty[$. Notare che $-9 \notin S$: per $x = -9$ si ha che la condizione $-9 > -9$ non è soddisfatta! □

In quest'ultimo caso, l'insieme $S := \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2 < 4x + 7\}$ è stato riscritto in forma equivalente come $S =]-9, +\infty[$, ma è un insieme infinito e quindi non possiamo dare l'elenco completo di TUTTI i suoi elementi meglio di così.

In generale, si tenga presente che un'equazione, una disequazione, o un sistema sono problemi, e che risolverli vuol dire precisamente descrivere l'insieme delle loro soluzioni, nel modo più esplicito possibile. Le tecniche risolutive apprese nella scuola secondaria hanno precisamente questo come scopo, ed è bene averlo sempre presente: imparare una tecnica o delle manipolazioni senza capirne lo scopo è solo una parvenza di conoscenza, faticosa, mnemonica e sostanzialmente inutile.

10. Confronto tra insiemi

Dati due numeri, siamo abituati al fatto che è sempre possible confrontarli, cioè stabilire se uno dei due è più grande dell'altro o se sono uguali. Non ci sono altre eventualità, nell'ambito dei numeri reali. Farlo è, di regola, semplice, anche se non sempre ovvio:

***Esercizio* 46.** Confrontare i numeri

(1) -2 e $-15/7$;
(2) $12/13$ e $6/7$;
(3) $\sqrt[3]{3}$ e $7/5$.

Svolgimento. Confrontiamo -2 e $-15/7$: sarà forse vero che, diciamo, $-2 \leqslant -15/7$? A causa della seconda legge di equivalenza per le disuguaglianze, questa affermazione è equivalente all'affermazione $2 \geqslant 15/7$ (abbiamo moltiplicato ambo i membri per $-1 < 0$), e applicando di nuovo la stessa legge (stavolta moltiplicando ambo i membri per 7) otteniamo che essa è equivalente a $14 \geqslant 15$. Dato che questa è un'affermazione falsa, ed è equivalente all'affermazione iniziale $-2 \leqslant -15/7$, anche essa risulta falsa. Perciò, è vero che $-2 > -15/7$.

Allo stesso modo, è facile vedere che $12/13 > 6/7$.

Per l'ultimo confronto, ricordiamo che una proprietà dei numeri reali recita così:

$$\forall a, b \in [0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (a \leqslant b \iff a^n \leqslant b^n)$$

(*è necessario escludere il caso $n = 0$, perchè $a^0 = 1$ per ogni a e quindi automaticamente $a^0 = b^0$, indipendentemente da chi siano a e b; inoltre, è essenziale che siano $a, b \geqslant 0$, altrimenti l'equivalenza non vale: si pensi per esempio al fatto che $-2 < 2$, ma $(-2)^2 = 2^2$*), per cui la proposizione $\sqrt[3]{3} \leqslant 7/5$ è equivalente alla proposizione $(\sqrt[3]{3})^3 \leqslant (7/5)^3$, cioè $3 \leqslant 343/125$. Applicando il secondo principio di equivalenza per le disuguaglianze (moltiplicando ambo i membri per 125), questa proposizione è equivalente alla proposizione $375 \leqslant 343$, che è falsa. Perciò è falsa anche la proposizione iniziale, $\sqrt[3]{3} \leqslant 7/5$, e quindi $\sqrt[3]{3} > 7/5$. □

L'idea di *confrontare* due oggetti è un'idea di base e naturale, e possiamo farlo anche con gli insiemi; tuttavia, mentre siamo così abituati a confrontare tra loro i numeri, può essere ancora non ben chiaro cosa vuol dire, esattamente, confrontare tra loro due insiemi. In effetti, c'è più di un modo per confrontare tra loro due insiemi, e l'esito del confronto tra gli insiemi A e B può essere diverso a seconda di ciò che intendiamo. Qui esaminiamo il modo più ovvio:

Definizione 10.1. Dati gli insiemi A e B, diciamo che A è contenuto in B, o che B contiene A, o ancora che A è un sottinsieme di B, o infine che A è una parte di B, e scriviamo sinteticamente $A \subseteq B$, se e solo se

$$\forall\, a \in A \quad a \in B,$$

cioè se ogni elemento di A è anche elemento di B. Nel caso ciò non avvenga, diciamo che A *non è contenuto in* B (o che B *non contiene* A), e scriviamo $A \nsubseteq B$.

Esplicitamente, dire che $A \nsubseteq B$ vuol dire che $\exists\, x \in A$ tale che $x \notin b$ (la negazione di $(\forall\, x \in A \quad a \in B)$). Il simbolo $\subseteq$ è detto *simbolo di inclusione*, ed è stato scelto per ricordare graficamente il simbolo usato normalmente per il confronto tra numeri, $\leqslant$, di cui è una modifica.

Come si fa, allora, a confrontare (rispetto l'inclusione) degli assegnati insiemi A e B, cioè a decidere se $A \subseteq B$ o meno? Se A è dato attraverso una lista esplicita dei suoi elementi (per esempio, se A ha "pochi" elementi), basta scorrerla e controllare che ciascun elemento di A sia anche in B. Facile! Ma non sempre attuabile.

Esempio 10.2. Dati $A := \{0, 1/2, \sqrt{3}\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$, $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$, risulta $A \subseteq B$, ma $A \nsubseteq C$:

- Poichè $0^2 = 0 < 4 \Rightarrow 0 \in B$; similmente, $(1/2)^2 = 1/4 < 4$ e $(\sqrt{3})^2 = 3 < 4$, per cui ciascun elemento di A è un elemento di B, e possiamo scrivere $A \subseteq B$;
- invece, $A \nsubseteq C$, perchè anche se $1/2$ e $\sqrt{3}$ sono in C, tuttavia $0^2 = 0$ non è > 0, e quindi l'elemento 0 di A non è un elemento di C. Abbiamo perciò un elemento di A che non è in C, e quindi $A \nsubseteq C$.

In generale, però, sappiamo che un insieme non sarà descritto da una lista di elementi e, se pure fosse, non è detto che sia abbastanza piccolo da permetterci di controllarli uno per uno!

***Esercizio* 47.** Dati gli insiemi $A := \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $B := \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, decidere se $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Svolgimento. Nessuno dei due insiemi è scritto nella forma di lista, nè nella forma $\{x \mid p(x)\}$, ma entrambi nella forma $\{r(x) \mid x \in \mathscr{R}\}$. Inoltre, entrambi gli insiemi sono costituiti da infiniti elementi distinti, per cui non possiamo semplicemente elencarli e confrontarli uno per uno. Come fare? Cominciamo passo passo le nostre verifiche:

- Controlliamo se $A \subseteq B$: se x è un arbitrario elemento di A, è vero che $x \in B$? Vediamone qualcuno in faccia: in corrispondenza dei valori $0, 1, -1, 2, -2$ di k otteniamo i rispettivamente gli elementi di A seguenti $1, 3, -1, 5, -5$. Guardiamo 1: è in B? Se fosse in B, dovrebbe esistere un intero h tale che $1 = 4h + 3$, cioè $4h = -2$ (abbiamo usato la prima legge di equivalenza per le uguaglianze). D'altra parte, -2 NON è un multiplo intero di 4, e quindi non esiste un intero h tale che $4h = -2$. Se ancora non siamo convinti, facciamo un passo ulteriore: usando il primo principio di equivalenza per le uguaglianze, $4h = -2$ è equivalente all'uguaglianza $4h + 2 = 0$, cioè $2(2h + 1) = 0$; per la legge di annullamento del prodotto, ciò equivale a dire che $2h + 1 = 0$ e, ancora per la prima legge di equivalenza per le uguaglianze, ciò è equivalente a dire che $2h = -1$, per cui -1 dovrebbe essere pari! Di conseguenza, l'elemento $1 \in A$ non può essere in B. Possiamo perciò fermarci: avendo trovato un elemento di A (il numero 1) che non è in $B \Rightarrow A \nsubseteq B$.
- Controlliamo se $B \subseteq A$: facciamo di nuovo un test su qualche elemento di B. In corrispondenza di $k = 0, 1, 2, -1, -2$ otteniamo $3, 7, 11, -1, -5$. Ciascuno di essi è in A: $3 = 2 \cdot 1 + 1$, $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $11 = 2 \cdot 5 + 1$, $-1 = 2 \cdot (-2) + 1$, $-5 = 2 \cdot (-3) + 1$, e ci viene l'idea che forse, dopotutto, $B \subseteq A$. Però, l'aver verificato che $b \in B$ comporta $b \in A$ per una manciata di elementi non basta a concludere che $B \subseteq A$: dobbiamo verificare che ciò accade $\forall b \in B$, e non solo per qualcuno! Sia perciò $b \in B$; allora esiste $\overline{k} \in \mathbb{Z}$ tale che $b = 4\overline{k} + 3$. Affinchè $b \in A$ deve esistere un $h \in \mathbb{Z}$ (diverso da $\overline{k}$: non possiamo aspettarci che magicamente lo stesso $\overline{k}$ vada bene per scrivere b tanto come $4\overline{k} + 3$ che come $2\overline{k} + 1$!) tale che $b = 2h + 1$, e cioè deve risultare

$$2h + 1 = b = 4\overline{k} + 3 \quad \iff \quad 2h = 4\overline{k} + 2 \quad \iff \quad 2h = 2(2\overline{k} + 1).$$

Per la legge di annullamento del prodotto, ciò vuol dire che $h = 2\overline{k} + 1$, e questo vuol dire che *sappiamo come determinare il valore di h opportuno per scrivere un numero $b = 4\overline{k} + 3$ nella forma $b = 2h + 1$*: basta prendere $h = 2\overline{k} + 1$. Per esempio, per $k = 8$ il corrispondente elemento di B è $b = 4 \cdot 8 + 3 = 35$, e per scriverlo come elemento di A basta prendere $h = 2 \cdot 8 + 1 = 17$: come verifica, si ha in effetti $2 \cdot 17 + 1 = 35 = b$. Questo vuol dire che $\forall b \in B\ \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $b = 2h + 1$, cioè che $\forall b \in B$ è $b \in A$, e perciò possiamo scrivere $B \subseteq A$.

□

Il confronto per inclusione tra insiemi condivide alcune proprietà del confronto usuale tra numeri ma, essendo altro, non possiamo aspettarci che la situazione sia proprio la stessa! Eccone un esempio:

Esempio 10.3. Prendiamo gli insiemi A, B, C dell'esempio 10.2: è abbastanza chiaro che $B \nsubseteq A$ e $C \nsubseteq A$, ma che dire del confronto tra B e C? Risulta $B \nsubseteq C$: infatti possiamo esibire un elemento di B che non è in C, e precisamente l'elemento 0. E' altrettanto vero che $C \nsubseteq B$, perchè possiamo esibire un elemento di C che NON è in B: basta prendere $x = 3$ per avere un elemento di C ($x^3 = 9 > 0$) ma non in B (perchè 9 non è < 4).

Quest'ultimo esempio evidenzia una caratteristica di questo confronto tra insiemi che non si presentava nel confronto tra numeri: non è detto che due insiemi siano confrontabili tramite inclusione. Più precisamente, nel confronto tra numeri sapevamo che $a \nleqslant b \iff b < a$, mentre confrontando due insiemi A e B tramite inclusione è facile che accada $A \nsubseteq B$ **e** $B \nsubseteq A$! In tal caso, appunto, gli insiemi A e B si dicono *non confrontabili*.

Il confronto per inclusione permette anche di definire con semplicità il concetto di *uguaglianza* tra insiemi:

Definizione 10.4. Dati gli insiemi A e B, diciamo che essi sono uguali se e solo se $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

In altre parole, gli insiemi A e B si dicono *uguali* se ogni elemento di A è anche elemento di B, e ogni elemento di B è a sua volta elemento di A. Un modo (un po' troppo) sintetico per esprimere ciò è dire che A e B si dicono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questa espressione però è un po' traditrice: funziona bene se gli insiemi hanno pochi elementi elencati esplicitamente, ma per insiemi qualunque tende a confondere le acque e a far sembrare difficile ciò che invece è semplice. Perciò, è bene appoggiarsi alla definizione "ufficiale", e controllare separatamente che siano valide entrambe le inclusioni.

Tutta una serie di variazioni sul simbolo di inclusione, che ricalcano quel che facciamo di solito con il simbolo $\leqslant$, sono disponibili: scrivere $A \subseteq B$ vuol dire la stessa cosa che scrivere $B \supseteq A$ (qui, possiamo dire che B contiene A oppure restare fedeli alla frase A è contenuto in B: è lo stesso); per dire che $A \subseteq B$ ma $A \neq B$ possiamo scrivere $A \subset B$ (seguendo la stessa logica usata per distingure tra $a \leqslant b$ e $a < b$), e dire che A è un sottinsieme proprio di B (cioè, $A \subseteq B$ ma esiste almeno un elemento $b \in B$ tale che $b \notin A$), ma è più sicuro scrivere $A \subsetneq B$, in modo da togliere ogni dubbio.

L'insieme vuoto, rispetto l'inclusione, gode di una proprietà unica: $\varnothing$ è contenuto in tutti gli insiemi. Per convincersene, ricordiamoci semplicemente cosa dovrebbe succedere affinchè dato un insieme A fosse vero che $\varnothing \nsubseteq A$: dovremmo poter esibire un elemento del primo insieme, $\varnothing$, che non appartiene al secondo (A). Dato che non c'è alcun elemento in $\varnothing$, in particolare non c'è alcun elemento da poter esibire e, quindi, $\varnothing \subseteq A$.

Vediamo un esempio concreto di come si fa a verificare l'uguaglianza tra due insiemi quando non è possibile confrontare le liste esplicite dei loro elementi:

***Esercizio* 48.** Assegnati gli insiemi $A := \{4k-3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $B := \{4k+5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, provare che $A = B$.

Svolgimento. Entrambi gli insiemi sono infiniti, per cui è illusorio pensare di poter verificare elemento per elemento che essi contengano gli stessi oggetti. Usiamo invece la definizione di uguaglianza tra insiemi, e cioè controlliamo separatamente che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$; fatto ciò, ai sensi della definizione possiamo scrivere $A = B$.

Cominciamo con il controllare $A \subseteq B$: se $a \in A$ vuol dire che esiste un certo intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 4k - 3$, e per far vedere che $a \in B$ dobbiamo esibire un opportuno $h \in \mathbb{Z}$ che ci permetta di scrivere $a = 4h + 5$. Senza cercare di essere troppo creativi, dobbiamo cioè cercare un h (che quindi è la nostra incognita!) che sia soluzione del problema (equazione!) $4k - 3 = 4h + 5$. Applicando il primo principio di equivalenza per uguaglianze, esso è equivalente al problema $4h = 4k-8$, cioè $4h = 4(k - 2)$, e pertanto basta scegliere $h = k - 2$. A mo' di verifica (non necessaria, ma giusto per togliere gli ultimi possibili dubbi in merito), verifichiamo quanto vale $4h + 5$ per $h = k - 2$:

$$4(k-2) + 5 = 4k - 8 + 5 = 4k - 3 = a\,\checkmark$$

Perciò resta provato che $a \in A \Rightarrow a \in B$, e quindi $A \subseteq B$.

Proviamo ora che $B \subseteq A$: se $b = 4k + 5 \in B$ e vogliamo che $b \in A$ deve esistere un $h \in \mathbb{Z}$ tale che $4k + 5 = 4h - 3$, cioè tale che $4h = 4k + 8$, il che fornisce la soluzione $h = k + 2$. Da ciò consegue che $b \in A$, e quindi $B \subseteq A$. Poichè $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, per definizione possiamo scrivere $A = B$. □

Vediamo qualche altro piccolo ma istruttivo esercizio:

***Esercizio* 49.** Si considerino gli insiemi $A := \{2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2\}$ e $B := \{2, 3\}$. E' vero che $A = B$?

Svolgimento. Certamente $B \subseteq A$: entrambi gli elementi 2 e 3 che costituiscono B sono in A. Però, si noti che essi sono anche gli unici elementi che compaiono in A: sono scritti ripetutamente, ma non ce ne sono altri, e ciascuno di essi è anche in B. Perciò, anche $A \subseteq B$ è vero, e quindi $A = B$. □

Da questo esercizio (che può agevolmente essere riscritto in termini generali) si capisce che non è importante quante volte scriviamo uno stesso elemento nell'elencare gli oggetti dell'insieme A, perchè l'insieme non cambia. L'unica differenza consiste nel decidere se un oggetto x è in A o non è in A: se $x \in A$, affermarlo una, 10, 1000 o infinite volte non cambia la sostanza nè ingrandisce A!

***Esercizio* 50.** Siano $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 1, 3\}$ e $C := \{3, 1, 2\}$. E' vero o no che $A = B = C$?

Svolgimento. Di nuovo, basta applicare la definizione di uguaglianza tra insiemi e controllare (cosa molto facile, qui!) che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$ per concludere che $A = B$. Allo stesso modo, si prova che $B = C$, e quindi automaticamente A, B, C saranno pure scritti in modo diverso, ma sono esattamente lo stesso insieme. □

Anche quest'esercizio ci insegna qualcosa di generale: non è importante in che ordine elenchiamo gli oggetti che costituiscono un insieme, perchè cambiarlo non cambia l'insieme.

Alla luce di queste osservazioni, è chiaro che siamo molto liberi nello scrivere la lista esplicita degli elementi di un insieme: possiamo scriverne gli elementi nell'ordine che preferiamo, e eventualmente anche scriverli ripetutamente, perchè l'insieme ottenuto non cambia.

11. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: operazioni insiemistiche

Sono tanti i modi con cui possiamo costruire nuovi insiemi; questa flessibilità costituisce una delle ragioni principali per le quali l'insiemistica svolge un ruolo così importante in tutta la Matematica, e non solo in essa. Tra tutti questi modi, alcuni sono simili a ciò che chiamiamo *operazioni* tra numeri:

Definizione 11.1. ***(Unione)***
Dati gli insiemi A e B, si dice unione di A e B, e si denota con $A \cup B$, l'insieme

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

In altri termini, $A \cup B$ è l'insieme costituito dagli oggetti che sono in A o in B (o in entrambi).

E' chiaro che $A \subseteq A \cup B$, così come pure $B \subseteq A \cup B$: unendo A ad un altro insieme l'insieme ottenuto è grande almeno quanto A.

Definizione 11.2. ***(Intersezione)***
Dati gli insiemi A e B, si dice intersezione di A e B, e si denota con $A \cap B$, l'insieme

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

In altri termini, $A \cap B$ è l'insieme costituito dagli oggetti in comune tra A e B.

E' chiaro che, quali che siano A e B, risulta $A \cap B \subseteq A$, così come pure $A \cap B \subseteq B$: intersecando A con un altro insieme, si ottiene un insieme che è al più grande quanto A.

Esempio 11.3. Siano $A := \{1, 4, 7\}$, $B := \{1, 4, 8, 9\}$. Allora $A \cup B = \{1, 4, 7, 8, 9\}$, e $A \cap B = \{1, 4\}$.[5] $\square$

Definizione 11.4. Gli insiemi A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = \varnothing$.

Naturalmente, se A e B NON sono disgiunti, ciò vuol dire che esiste almeno un elemento x che è sia in A che in B. Se A e B sono disgiunti, allora un elemento di $A \cup B$ è o esclusivamente in A, o esclusivamente in B.

Unione e intersezione insiemistica sono delle vere operazioni tra insiemi: a partire da due oggetti (insiemi), costruiscono un nuovo oggetto (insieme), nè più nè meno di come addizione e moltiplicazione fanno a partire da due oggetti (numeri) e producendo un nuovo oggetto (numero), dello stesso tipo di quelli iniziali. Come per $+$ e $\cdot$, anche $\cup$ e $\cap$ godono di alcune proprietà che è utile conoscere; alcune sono caratteristiche dell'operazione, qualcun'altra le lega tra di loro:

Proposizione 11.5. *Nel seguito, siano A, B, C insiemi qualunque. Si ha:*

- *$\cup$ e $\cap$ sono idempotenti: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;*
- *$\cup$ e $\cap$ sono commutative: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;*
- *$\cup$ e $\cap$ sono associative: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;*
- *$\cup$ e $\cap$ sono mutuamente distributive:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

L'ultima proprietà si chiama così perchè è molto simile (praticamente, la stessa) all'abituale proprietà distributiva delle operazioni tra numeri: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Da notare però che, nel caso di $\cup$ e $\cap$, la proprietà vale tanto per distribuire $\cap$ nell'unione $B \cup C$, quanto per distribuire l'altra operazione, $\cup$, sull'intersezione $B \cap C$. Questa cosa non ha analogo per $+$ e $\cdot$: come sappiamo bene, infatti, se $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$!

L'ultima operazione di base tra insiemi è

---

[5] si noti la diversa scrittura $:=$ o $=$, a seconda che si stia *definendo* l'insieme ($A := \{1, 4, 7\}$) o si stia *determinando* l'insieme ($A \cup B$). Non è "obbligatorio" adeguarsi a questa notazione, ma non fa certo male abituarcisi

Definizione 11.6. ***(Differenza insiemistica)***
Dati gli insiemi A, B, si dice differenza insiemistica tra A e B (prima A e poi B!), e si denota con $A \setminus B$, l'insieme

$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

In altri termini, $A \setminus B$ è il sottinsieme costituito dagli elementi di A che NON sono in B.

Chiaro che se A e B sono disgiunti allora l'operazione $A \setminus B$ ridà l'insieme A; in genere, però, $(A \setminus B) \subseteq A$ e $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$. Si tenga anche presente che $A \setminus B \neq B \setminus A$: l'operazione di differenza insiemistica, a differenza di $\cup$ e $\cap$, NON è commutativa, per cui è importante l'ordine con cui vengono nominati gli insiemi.

Esempio 11.7. Se A e B sono gli insiemi dell'Esempio 11.3, si ha

$$A \setminus B = \{7\}, \qquad B \setminus A = \{8, 9\}.\square$$

Definizione 11.8. ***(Complementare di un sottinsieme)***
Se $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ viene denotato con $\mathscr{C}_A(B)$ e vien detto il complementare di B in A.

Così, la costruzione del complementare non è davvero una nuova operazione, ma solo un modo differente di chiamare la differenza insiemistica tra due insiemi nel caso particolare in cui il secondo insieme è tutto contenuto nel primo; l'uso del termine *complementare* serve solo a sottolineare questa situazione, ed è usato perchè, in tal caso, $B \cap \mathscr{C}_A(B) = \varnothing$ e $A = B \cup \mathscr{C}_A(B)$ risulta unione di due sottinsiemi disgiunti (sinteticamente, si dice che A è ***unione disgiunta*** di B e del suo complementare).

Di norma, le considerazioni che si sviluppano circa un argomento fanno riferimento a un comune fissato insieme ambiente, per così dire. Per esempio, tutta la Matematica della scuola secondaria viene sviluppata nell'ambiente comune dei numeri reali; tanto è scontato questo fatto che spesso $\mathbb{R}$ nemmeno è citato (p.es.: con *risolvere l'equazione* $x^3 - x = 0$ si intende *determinare le soluzioni di* $x^3 - x = 0$ *in* $\mathbb{R}$, senza che nemmeno venga specificato $\mathbb{R}$). L'insieme ambiente diventa quindi una specie di universo nel quale si svolgono tutte le considerazioni. Quando è fissato l'insieme ambiente U, per non appesantire la notazione si evita di citarlo continuamente. Così, se $A \subseteq U$, invece di scrivere $\mathscr{C}_U(A)$ si preferisce semplificare la scrittura in $\mathscr{C}(A)$, e si parla semplicemente di *complementare* di A, invece che più propriamente di complementare di A *in* U.

Tutto ciò è molto naturale, per cui da qui in poi assumiamo che tutte le successive considerazioni avverranno in un fissato *insieme universo* U, che non citeremo esplicitamente e non descriveremo nei dettagli: ci basti sapere che questo concetto di *insieme universo* è semplicemente una versione astratta di ciò che, nella pratica, facciamo continuamente nel considerare problemi, teoremi e definizioni concreti.

Osservazione 11.9. Va detto, anche solo come parola di cautela, che un atteggiamento di questo tipo è MOLTO pericoloso: l'introduzione di un fantomatico "insieme universo" astratto, in cui tutta l'insiemistica si sviluppa, ma di cui non abbiamo dato una definizione rigorosa, causa conflitti e contraddizioni (paradossi) sul piano puramente astratto, lo stesso in cui è stato introdotto! Questi furono scoperti all'inizio del 1900, e portarono a una più rigorosa, meno naïf, Teoria degli Insiemi, che è al di fuori delle nostre necessità e non tratteremo. Vale la pena però esser coscienti che la nostra introduzione di un insieme universo è molto meno innocente e lecita di quanto appare! $\square$

Tornando al passaggio al complementare, l'aver introdotto il concetto di insieme universo consente di riscrivere l'operazione $\setminus$ in modo più efficace: dati gli insiemi

A e B (entrambi, come detto, sottinsiemi di U), risulta

$$A \setminus B = A \cap \mathscr{C}(B),$$

dove ovviamente $\mathscr{C}(B)$ intende il complementare di B in U. Diamo una piccola dimostrazione di ciò:

Dimostrazione.
$\boxed{\subseteq}$: proviamo che $A \setminus B \subseteq A \cap \mathscr{C}(B)$. Se $a \in A \setminus B \Rightarrow a \in A$ e $a \notin B$, per definizione di $A \setminus B \Rightarrow a \in A$ e $a \in \mathscr{C}(B)$ (il complementare di B), per cui $a \in A \cap \mathscr{C}(B)$ per definizione di insieme intersezione.
$\boxed{\supseteq}$: proviamo che $A \cap \mathscr{C}(B) \subseteq A \setminus B$. Se $a \in A \cap \mathscr{C}(B) \Rightarrow a \in A$ e, poichè $a \in \mathscr{C}(B)$ $\Rightarrow a \notin B$, per definizione di complementare. Ma questo vuol dire che $a \in A \setminus B$.

Dato che entrambe le inclusioni sono state verificate, i due insiemi $A \setminus B$ e $A \cap \mathscr{C}(B)$ sono uguali. □

Abbiamo perciò essenzialmente tre operazioni insiemistiche: $\cup$, $\cap$ e $\mathscr{C}$, e già conosciamo le più basilari proprietà di $\cup$ e $\cap$, comprese quelle che regolano le loro interazioni (le leggi di mutua distributività). E' tempo di conoscere le proprietà di base di $\mathscr{C}$ e come interagisce con $\cup$ e $\cap$:

Proposizione 11.10. *Siano A e B insiemi.*

- *$\mathscr{C}$ è involutoria: $\mathscr{C}(\mathscr{C}(A)) = A$;*
- *leggi di De Morgan: $\mathscr{C}(A \cup B) = \mathscr{C}(A) \cap \mathscr{C}(B)$ e $\mathscr{C}(A \cap B) = \mathscr{C}(A) \cup \mathscr{C}(B)$.*

Osservazione 11.11. Domanda: a guardare le leggi sulle operazioni $\cup$, $\cap$ e $\mathscr{C}$ non viene in mente nulla? Non ricordano qualcosa di Logica? Decisamente si. Precisamente, se sostituiamo alla nozione di *insieme* quella di *proposizione*, e alle operazioni $\cup, \cap, \mathscr{C}$ gli operatori logici $\vee, \wedge, \neg$ rispettivamente, ritroviamo effettivamente le leggi che regolano tra loro gli operatori logici di base! In effetti, i simboli $\cup$ e $\cap$ sono stati ottenuti modificando leggermente i simboli $\vee$ e $\wedge$ proprio per questo motivo; possiamo fare meglio ancora: il concetto di inclusione $\subseteq$ diventa automaticamente il concetto di implicazione $\Rightarrow$, e l'uguaglianza insiemistica diventa il concetto di equivalenza logica $\iff$!

Dovrebbe bastare questo a intuire una profonda verità: Insiemistica e Logica sono modi differenti di descrivere delle verità di base comuni, precisamente basate su una dicotomia ($\in$ o $\notin$ nel caso dell'insiemistica, T o F nel caso della logica), cioè su due possibili valori di base uno solo dei quali necessariamente assunto di volta in volta. Tuttavia, cambiare il linguaggio e passare ad un linguaggio più flessibile (nel nostro caso, a quello dell'Insiemistica) rende accessibili costruzioni e percorsi più ampi. Ciò non perchè le fondamenta siano diverse, ma perchè il linguaggio diventa uno strumento più efficace e performante, e permette di semplificare l'esplorazione. Ciò è avvenuto molte volte nel corso del progresso umano: come ulteriore esempio, si pensi alla radicale svolta che si è avuta passando dai numeri romani alla rappresentazione posizionale, senza la quale sarebbe stato letteralmente impossibile lo sviluppo scientifico che si è avuto a partire dalla loro introduzione da parte di Fibonacci attorno al 1200 d.C. □

Le operazioni insiemistiche consentono di costruire nuovi insiemi a partire da insiemi assegnati, ma solo fino a un certo punto:

***Esercizio* 51.** Siano $A := \{1,2\}$ e $B := \{2,3\}$, $U := \{1,2,3,4\}$. Quali insiemi si possono costruire usando le operazioni $\cup, \cap$ e $\mathscr{C}_U$?

Svolgimento. Certamente A e B, oltre che dati, possono essere costruiti. Per esempio, $A = A \cup A$. Anche l'insieme vuoto può essere ottenuto: $A \cup \mathscr{C}(A) = \varnothing$.[6] Possiamo costruire $C := A \cap B = \{2\}$ e $D := A \cup B = \{1, 2, 3\}$. Poi, possiamo costruire i vari complementari:

$$\mathscr{C}(\varnothing) = U,\ \mathscr{C}(A) = \{3, 4\},\ \mathscr{C}(B) = \{1, 4\},\ \mathscr{C}(C) = \{1, 3, 4\},\ \mathscr{C}(D) = \{4\}.$$

A questo punto abbiamo già costruito 8 nuovi insiemi a partire dai due dati (tre, in effetti: abbiamo fissato l'ambito nell'insieme U), per cui abbiamo in tutto 10 insiemi. Continuando così, si arrivano a costruire in tutto altri 6 insiemi non ancora elencati (verificare!), e nessun altro. Una cosa non banale da verificare, ma non difficile, è che cambiando l'insieme universo il numero complessivo di insiemi costruibili non cambia: potremmo per esempio fissare $U = \mathbb{R}$, e otterremmo lo stesso 16 insiemi distinti in tutto! □

In effetti, il concetto di insieme è così flessibile che ci sono molti altri modi per costruire *infiniti insiemi* a partire dal semplice $\varnothing$! Noi ne vedremo due, i più importanti accanto a quelli disponibili grazie alle operazioni insiemistiche. Prima di fare ciò, tuttavia, è bene vedere quanto frequentemente sono state usate le operazioni insiemistiche di base durante gli anni di scuola secondaria, pur senza esser state esplicitamente menzionate.

***Esercizio* 52.** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \\ 2x - 4 > 3x + 7 \end{cases}.$$

Svolgimento. Un *sistema* è un problema costituito da vari sottoproblemi (qui, due disequazioni, e precisamente la disequazione $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ e la disequazione $2x - 4 > 3x + 7$), e consiste nel chiedere di determinare il/i valore/i delle incognite (qui, c'è la sola incognita x) tra quelli disponibili (di nuovo, qui implicitamente si chiede di determinarli tra i numeri reali) che sono soluzioni di tutti i suoi sottoproblemi. Nel caso specifico, risolvere il sistema assegnato consiste nel determinare tutti i numeri reali a per i quali risultino vere tanto $a^2 - 4a + 3 \geqslant 0$ quanto $2a - 4 > 3a + 7$.

Ora: siano $S_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\}$ l'insieme delle soluzioni del primo sottoproblema, $S_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 > 3x + 7\}$ l'insieme delle soluzioni del secondo problema, e sia S l'insieme delle soluzioni del sistema assegnato. Per definizione stessa di ***soluzione di un sistema***, è $S = S_1 \cap S_2$: se $a \in S$ allora in particolare a è soluzione tanto della prima quanto della seconda disequazione e, viceversa, se a è soluzione di ambo le disequazioni allora è precisamente ciò che intendiamo dicendo che *a è una soluzione del sistema*. Perciò, ogni volta che abbiamo risolto un *sistema*, di qualunque natura (equazioni, disequazioni, misto o altro) ciò che abbiamo fatto non è stato altro che *calcolare l'intersezione degli insiemi delle soluzioni dei sottoproblemi che costituiscono il sistema.*

Chiarito questo, tutto il resto è conseguente:

- risolviamo la prima disequazione, cioè determiniamo S_1: è una disequazione di secondo grado, l'equazione ad essa associata è $x^2 - 4x + 3 = 0$, che ha due soluzioni reali: $x_1 := 1$ e $x_2 := 3$. Pertanto il trinomio di secondo grado $x^2 - 4x + 3$ assume valore negativo nell'intervallo $]1, 3[$ (il che vuol dire che $x^2 - 4x + 3 < 0$ per tutti gli $x \in]1, 3[$). Di conseguenza, $S_1 = \mathscr{C}(]1, 3[) =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ (a noi servono i valori in cui il trinomio non assume valori negativi!), un'unione di insiemi (intervalli, per la precisione);

[6] nel nostro contesto, U svolge il ruolo di "insieme universo" concreto: non è il fantomatico insieme universo astratto, ma ciò non lede le nostre considerazioni. Perciò, scriveremo $\mathscr{C}$ invece che $\mathscr{C}_U$.

- risolviamo la seconda disequazione, cioè determiniamo S_2: questa è una disequazione di primo grado, equivalente (usando i principi di equivalenza per le disuguaglianze) alla disequazione $x < -11$, e quindi $S_2 =]-\infty, -11[$;
- ora possiamo conoscere S:

$$\begin{aligned} S = S_1 \cap S_2 &= \Big(\big(]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\big) \ \cap \ ]-\infty, -11[\Big) \\ &= \big(]-\infty, 1] \ \cap \ ]-\infty, -11[\big) \ \cup \ \big([3, +\infty[\ \cap \ ]-\infty, -11[\ \big) \qquad \text{(per la distributività)} \\ &=]-\infty, -11[\cup \varnothing =]-\infty, -11[, \end{aligned}$$

cioè $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -11\}$.

Di solito, non siamo abituati a risolvere il sistema con tutti questi dettagli, e va bene così – la risoluzione viene snellita, in effetti. E' però importante chiarirseli almeno una volta, e capire cosa stiamo facendo: determiniamo le soluzioni S_1 ed S_2 dei sottoproblemi, e determiniamo $S = S_1 \cap S_2$. Capito ciò, risolvere problemi di qualunque tipo (cioè, i cui costituenti siano qualunque) diventa una questione di tecnica, non più concettuale. In particolare, capiamo di aver usato molte volte, anche se più o meno inconsapevolmente, le operazioni insiemistiche $\cap, \cup, \mathscr{C}$ e la proprietà distributiva già durante gli anni di scuola superiore. □

***Esercizio* 53.** Risolvere la disequazione

$$\frac{2x-1}{3x+4} \geqslant 1.$$

Svolgimento. E' più facile confrontare una quantità con 0 che con qualche altra cosa. Perciò riscriviamo la disequazione in modo equivalente come

$$\frac{-x-5}{3x+4} = -\frac{x+5}{3x+4} \geqslant 0$$

usando il primo principio di equivalenza per le disuguaglianze. Usando poi il secondo principio (moltiplicando ambo i membri per -1) otteniamo il problema equivalente

$$\frac{x+5}{3x+4} \leqslant 0.$$

Il problema assegnato è perciò equivalente a chiedere *per quali numeri reali x la corrispondente frazione è non positiva?*

Operativamente, la frazione è positiva se e solo se numeratore e denominatore sono entrambi positivi o entrambi negativi. Coerentemente, chiediamoci separatamente *quando $x+5>0$?* e *quando $3x+4>0$?* La risposta a questi problemi è semplice: la risposta alla prima domanda è $\forall x \in A_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\} =]-5, +\infty[$. Automaticamente per ogni $x \in \mathscr{C}(A_1) =]-\infty, -5]$ risulta $x+5 \leqslant 0$. Similmente, la risposta alla seconda domanda è $\forall x \in A_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4/3\} =]-4/3, +\infty[$. Sappiamo perciò con esattezza per quali $x \in \mathbb{R}$ la frazione è non positiva: per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano l'affermazione (proposizione)

$$\begin{cases} x \geqslant -5 \\ x < -4/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant -5 \\ x > -4/3 \end{cases},$$

cioè se e solo se x è in

$$\begin{aligned} S &:= \Big([-5, +\infty[\cap]-\infty, -4/3[\Big) \cup \Big( ]-\infty, -5] \cap]-4/3, +\infty[\Big) \\ &= [-5, -4/3[\cup \varnothing = [-5, -4/3[. \end{aligned}$$

Perciò, l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza, $S := \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < -4/3\} = [-5, -4/3[$, è di nuovo ottenuto come unione di intersezioni di insiemi. Nel corso della scuola secondaria ciò non viene enfatizzato, per una serie di motivi. Tuttavia, è un'ulteriore esempio a conferma del fatto che siamo più che abituati a vedere "in azione" le operazioni insiemistiche: è solo che non sono state citate in astratto, ma le abbiamo usate continuamente. □

12. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: l'insieme delle parti

Nel definire un insieme, abbiamo solo bisogno di avere a disposizione degli oggetti, e non abbiamo alcuna restrizione sulla loro natura: potrebbero essere numeri, lettere, macchine, persone, pianeti, e una miriade di oggetti di altro tipo. L'unica cosa che ci interessa è avere a disposizione degli oggetti, e usarli per formare una nuova entità (un insieme) scegliendone alcuni tra quelli disponibili.

In particolare, possiamo trattare degli insiemi già a nostra disposizione come oggetti per formare un nuovo insieme, per così dire *"di secondo livello"*.

Esempio 12.1. Dati $A = \{x\}$, $B = \{1\}$, $C := \{2,3\}$ possiamo formare l'insieme "di secondo livello" $\mathscr{A} := \{A, B, C, \varnothing, 1\}$, cioè esplicitamente

$$\mathscr{A} = \Big\{\{x\},\ \{1\},\ \{2,3\},\ \varnothing,\ 1\Big\}.$$

Da notare che è vero sia che $\varnothing \subseteq \mathscr{A}$ (perchè $\varnothing$ è un sottinsieme di ogni insieme, in particolare dell'insieme $\mathscr{A}$), sia che $\varnothing \in \mathscr{A}$ (perchè compare nella lista degli elementi di $\mathscr{A}$). Ancora, è vero tanto che $1 \in \mathscr{A}$ quanto che $\{1\} \in \mathscr{A}$ e che $\{1\} \subseteq \mathscr{A}$ (perchè $1 \in \mathscr{A}$ e quindi ogni oggetto dell'insieme $\{1\}$ è anche oggetto di $\mathscr{A}$). E' invece falso che $x \in \mathscr{A}$: l'<u>oggetto</u> x NON è presente nella lista degli elementi di $\mathscr{A}$; in essa compare, come <u>oggetto</u>, l'<u>insieme</u> $\{x\}$, non x, per cui è vero che $\{x\} \in \mathscr{A}$. Così pure, $2, 3 \notin \mathscr{A}$, e $\{2\}, \{3\} \notin \mathscr{A}$, mentre $\{2,3\} \in \mathscr{A}$. □

Dovrebbe esser chiaro dall'esempio che è possibile avere un insieme che, come <u>singolo oggetto</u>, è un elemento di un altro insieme. Bisogna però stare attenti a non fare confusione: se A è un insieme, e $A \in \mathscr{A}$ (A è un oggetto di un altro insieme $\mathscr{A}$), allora un oggetto $x \in A$ NON è in genere un membro di $\mathscr{A}$ (gli elementi 2 e 3 dell'esempio precedente).

Non dovrebbe essere difficile ora capire il seguente esempio:

Esempio 12.2. Gli insiemi $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$ sono diversi: $\varnothing$ è l'insieme vuoto, ma $\{\varnothing\}$ no! In effetti, è un insieme costituito da un unico elemento, che è l'insieme $\varnothing$ <u>visto come oggetto</u> di $\{\varnothing\}$. Se ancora non fosse chiaro cosa si sta affermando, poniamo $a := \varnothing$: allora $\{\varnothing\} = \{a\}$ è un insieme con un unico oggetto, a, e quindi $\{a\}$ è non vuoto – ciò non aggiunge assolutamente nulla a quanto già affermato (che $\varnothing \neq \{\varnothing\}$), ma forse aiuta a capire meglio cosa si debba intendere dicendo che nel primo caso si considera $\varnothing$ come un insieme a sè stante, nel secondo come *oggetto* di un insieme.

Automaticamente, pure vero è che $\{\{\varnothing\}\} \neq \{\varnothing\}$: dato che $\varnothing \neq \{\varnothing\} \Rightarrow$ gli insiemi formati da tali oggetti, $\{\varnothing\}$ e $\{\{\varnothing\}\}$, sono diversi! Possiamo perciò continuare ad aggiungere le parentesi, considerando $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, $\{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}, \dots$ ottenendo insiemi sempre diversi (e di livello sempre più alto, per così dire).

Sempre sullo stesso tema, si consideri il seguente

Esempio 12.3. Gli insiemi $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sono a due a due distinti, e più precisamente

$$\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\} \subsetneqq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

La catena si può allungare: detto $A_0 := \varnothing$, poniamo $A_1 := A_0 \cup \{A_0\}$, e poi $A_2 := A_1 \cup \{A_1\}$, $A_3 := A_2 \cup \{A_2\}, \dots$ e più in generale $A_n := A_{n-1} \cup \{A_{n-1}\}$, ottenendo infiniti insiemi tutti a due a due distinti e, in più, $A_0 \subsetneqq A_1 \subsetneqq A_2 \subsetneqq A_3 \subsetneqq \dots$.

In altri termini, siamo partiti dall'insieme più piccolo in assoluto – l'insieme vuoto – e abbiamo costruito in questa maniera infiniti insiemi uno più grande dell'altro, tutti a due a due distinti. Esplicitamente,

$$\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\} \subsetneqq \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subsetneqq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \subsetneqq \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\Big\}$$

etc. Il lettore dovrebbe convincersi di ciò, controllando *inclusione per inclusione* il senso e la veridicità di quanto scritto: passarci sopra senza dedicargli la dovuta attenzione non gli avrebbe insegnato nulla. □

La costruzione appena vista è il modello di base con il quale è costruito l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$, ma non è questa la sede opportuna per discuterne i dettagli.

Piuttosto, l'idea di usare insiemi assegnati come oggetti con cui costruire nuovi insiemi (li abbiamo chiamati di secondo livello, che rende abbastanza bene l'idea pur non essendo in realtà un nuovo concetto), rende possibile dare la seguente

Definizione 12.4. Sia X un insieme. Si dice insieme delle parti (o insieme potenza) di X, e si denota con $\wp(X)$ (su alcuni testi con 2^X), l'insieme

$$\wp(X) := \{A \mid A \subseteq X\},$$

cioè l'insieme i cui oggetti sono tutti i possibili sottinsiemi di X.

Si noti che, ovviamente, $X \in \wp(X)$, perchè $X \subseteq X$; sempre ovviamente, $\varnothing \in \wp(X)$ perchè $\varnothing \subseteq X$. Tolti pochissimi (due!) casi, però, ci sono MOLTI elementi in $\wp(X)$, anche quando X è "piccolo"

Esempio 12.5. Calcoliamo l'insieme delle parti per alcuni insiemi "piccoli":

- $X := \varnothing$: l'unico sottinsieme di $\varnothing$, insieme che non ha alcun elemento, non può che essere esso stesso. Quindi $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Per le discussioni precedenti, questo insieme NON è $\varnothing$, ma un insieme con un unico elemento (l'insieme $\varnothing$, visto come oggetto dell'insieme $\wp(\varnothing)$). Notare che l'insieme di partenza, $\varnothing$, aveva zero elementi, mentre $\wp(\varnothing)$ possiede un solo membro;
- $X := \{a\}$: certamente in $\wp(X)$ ci sono $\varnothing$ e $X = \{a\}$ stesso. D'altra parte, non ci sono altri sottinsiemi di X, per cui $\wp(X) = \{\varnothing, \{a\}\}$. Notare: X aveva un solo elemento, e $\wp(X)$ due;
- $X := \{a, b\}$: i soli sottinsiemi di X sono $\varnothing$, $\{a, b\}$ (cioè X stesso) e i due sottinsiemi distinti $\{a\}$ e $\{b\}$. Perciò, $\wp(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Cioè, X aveva due elementi, e $\wp(X)$ ne ha quattro. Notare che $a \in X$, ma $a \notin \wp(X)$.
- $X := \{a, b, c\}$: ormai dovrebbe essere consolidato come costruire $\wp(X)$: ci sono certamente $\varnothing$ e X, poi i tre insiemi $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c\}$ e gli altri tre sottinsiemi $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$, null'altro. Notiamo che X aveva 3 elementi, e $\wp(X)$ ne ha ben 8.

Quanti elementi vi aspettate in $\wp(X)$, quando X ha 10 elementi? Tentare di indovinare non costa nulla... Se l'intuizione avuta è corretta, dovreste aver compreso perchè $\wp(X)$ si chiama insieme *potenza* di X, e perchè talvolta lo si indica con 2^X.

L'insieme $\wp(X)$ vien detto insieme delle parti di X perchè la parola parte, riferita a un insieme X, è sinonimo di sottinsieme. Per evitare di ripetere la parola insieme dicendo *l'insieme dei sottinsiemi di X* si è preferito dire *l'insieme delle parti di X* – il senso è esattamente lo stesso. Lo stesso motivo, più in generale, è alla base del nome usato generalmente per indicare un insieme i cui oggetti sono altri insiemi: noi abbiamo temporaneamente usato il termine *insiemi di secondo livello*, ma il modo più diffuso usato per evitare di dire *un insieme di insiemi* è l'espressione famiglia di insiemi. Quindi, potremmo dire correttamente che $\wp(X)$ è la famiglia delle parti di X. La cosa importante, naturalmente, è capire cosa è, più che come si chiama.

Osservazione 12.6. Per evitare di perdersi in un bicchier d'acqua, è bene chiarirsi una volta per tutte che

- dire che $x \in X$ vuol dire che $\{x\} \subseteq X$;
- dire che $A \subseteq X$ vuol dire che $A \in \wp(X)$.

Perciò, dire $x \in X$, $\{x\} \subseteq X$ o $\{x\} \in \wp(X)$ sono tre affermazioni equivalenti.

Abbiamo visto l'insieme delle parti di alcuni insiemi piccoli, con non più di tre elementi. Tuttavia, nulla nella definizione di $\wp(X)$ pone questa limitazione: possiamo considerare l'insieme delle parti anche di insiemi infiniti. A questo proposito, anche senza entrare propriamente nel merito e con una certa imprecisione, è bene sapere che l'insieme dei numeri reali "è" (in un senso che sarebbe da precisare meglio) l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$. Questo dovrebbe dare almeno una pallida idea di quanto $\mathbb{R}$ sia "più grande" di $\mathbb{N}$.

13. Nuovi insiemi a partire da insiemi dati: il prodotto cartesiano

Un altro modo, estremamente importante, di costruire nuovi insiemi a partire da insiemi assegnati è costruito sul concetto semplice ma delicato di *coppia ordinata*:

Definizione 13.1. Dati gli oggetti $x, y \in U$, diciamo coppia ordinata di prima entrata x e seconda entrata y, e la denoteremo con (x, y), l'insieme

$$(x, y) := \{x, \{x, y\}\}.$$

Il punto delicato nella definizione di coppia ordinata è che il senso che vorremmo attribuire a (x, y) è diverso da quello di $\{x, y\}$ per almeno due motivi

- vorremmo che, per avere senso il termine *coppia*, ci fossero *due* elementi di cui tener conto, anche quando $x = y$; per esempio, $(1, 1)$ deve essere ancora qualcosa costituito da <u>due</u> oggetti, ma $\{1, 1\} = \{1\}$;
- vorremmo che, per avere senso il termine *ordinata*, l'*ordine* con cui nominiamo i due oggetti che compaiono in essa deve essere significativo, per poter avere un *primo* e un *secondo* elemento; vorremmo cioè che le coppie ordinate $(1, 2)$ e $(2, 1)$ restassero oggetti distinti, perchè nella prima compare *prima* 1 *e poi* 2, nella seconda gli elementi compaiono in ordine inverso. Invece, sappiamo che $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

La definizione data è adeguata a preservare entrambe queste caratteristiche:

- se $x = y$, si ha $(x, x) = \{x, \{x\}\}$, e siccome (come sottolineato nella sezione precedente) $x \neq \{x\}$, l'insieme $\{x, \{x\}\}$ non collassa in un insieme con un unico oggetto, $\{x\}$;
- poichè $\{x, \{x, y\}\} \neq \{y, \{x, y\}\}$ se $x \neq y$ (perchè $x \in \{x, \{x, y\}\}$ ma $x \notin \{y, \{x, y\}\}$), le coppie ordinate (x, y) e (y, x) sono distinte.

Tuttavia, anche questa definizione porta con sè alcune complicazioni, che non è il caso di discutere qui; per curiosità, comunque, basta dare un'occhiata all'enciclopedia libera online *Wikipedia*, alla voce ordered pair, per avere un'idea di quanto è dibattuta la definizione corretta di coppia ordinata. Il punto è che per i concetti in qualche modo "innati", e che hanno un significato ovvio per la nostra esperienza, è difficile dare una definizione astratta e che non rischi di creare contraddizioni: le situazioni normali non consentono il loro insorgere, ma lavorando in astratto (ed è qui che nasce l'esigenza di una definizione astratta) non è escluso che possano presentarsi. Questo è precisamente ciò che accadde alle fondamenta della Matematica, quando la scoperta dell'antinomia di Russell le scosse e costrinse a una profonda revisione del concetto di Insieme, più formale e meno naïf, come già accennato prima.

Qui, il punto delicato è quello di definire in modo corretto cosa si debba intendere con coppia *ordinata*, cioè in cosa deve distinguere l'occorrenza di un oggetto *prima* o *dopo* di un altro. Lasciamo qui la questione, e accontentiamoci di quello che ci serve in pratica: una coppia ordinata è una sequenza di due oggetti, non per forza distinti, in cui è possibile distinguere un primo posto e un secondo posto. Dato che questa distinzione è importante per noi, possiamo dire che le coppie ordinate (x, y) e (u, v) sono uguali, e scriviamo $(x, y) = (u, v)$, se e solo se $x = u$ e $y = v$, cioè se e solo se posto per posto le due coppie recano lo stesso elemento: basta che in un singolo posto le due coppie presentino un elemento differente a far sì che le due coppie siano da considerare diverse. Perciò, $(1, 2) \neq (2, 1)$, anche se in entrambe compaiono gli stessi oggetti $1, 2$: ci interessa non solo *quali* oggetti compaiono, ma anche *dove* compaiono. Sottolineiamo di nuovo, quindi, che $(x, y) \neq \{x, y\}$: sono concetti diversi (insiemi diversi, ai sensi della definizione formale adottata da noi).

Una volta che il concetto delicato di coppia ordinata è stato chiarito, almeno nel contesto *pratico* che ci riguarderà, il prossimo concetto è introdotto in modo molto semplice:

Definizione 13.2. Dati gli insiemi A, B, si dice prodotto cartesiano di A per B (nominando A e B in questo ordine!) e si denota con $A \times B$, l'insieme

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

In altre parole, $A \times B$ è l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate costruibili scegliendo la prima entrata in A e la seconda entrata in B.

Un esempio dovrebbe chiarire una volta per tutte ogni possibile dubbio:

Esempio 13.3. Sia $A := \{1, 2, 3\}$ e $B := \{a, b\}$. Allora

$$A \times B = \{(1, a),\, (1, b),\, (2, a),\, (2, b),\, (3, a),\, (3, b)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1),\, (a, 2),\, (a, 3),\, (b, 1),\, (b, 2),\, (b, 3)\}$$

sono i due possibili prodotti cartesiani costruiti sugli insiemi assegnati A e B. Risulta $A \times B \neq B \times A$: infatti, nessuna delle coppie di $A \times B$ è in $B \times A$ (le coppie ordinate che costituiscono $A \times B$ hanno la prima entrata che è scelta in A in tutti i modi possibili, e quindi è uno tra gli elementi $1, 2$ e 3; nessuna delle coppie ordinate che costituiscono $B \times A$ ha come prima entrata un numero!). Allo stesso modo, nessuno degli elementi (coppie ordinate) che costituiscono $B \times A$ è in $A \times B$.

E' evidente che in ciò il fatto che in una coppia ordinata ci interessa l'*ordine* con cui si susseguono gli elementi è essenziale, e si riflette nel rendere $A \times B$ diverso da $B \times A$. □

Solo in un caso un prodotto cartesiano può essere l'insieme vuoto: se uno tra A e B è lui stesso l'insieme vuoto. In tal caso, infatti, NON si possono formare elementi di $A \times B$ nè di $B \times A$, perchè se $A = \varnothing$ non ci sono elementi da prendere in A per formare nè una coppia (a, b) nè una coppia (b, a).

Una volta introdotto il concetto di *coppia ordinata*, semplice ma che introduce una qualità concettuale nuova (espresse nelle parole *prima* e *dopo*), non c'è alcuna difficoltà nel considerare delle ovvie generalizzazioni, precisamente quelle di *terne ordinate*, *quaterne ordinate* etc. Per esempio, assegnare una terna ordinata consiste nel collocare in tre posti consecutivi degli oggetti (distinti o meno), registrando non solo *quali* sono gli elementi scelti, ma anche *in quale posto* ciascuno di essi è collocato. Così, $(1, 2, 1)$ è una terna ordinata, ed è distinta dall'altra terna ordinata $(1, 1, 2)$ perchè nel posto 2 esse recano oggetti diversi. Si ha così la altrettanto ovvia generalizzazione a prodotti cartesiani con più di due "fattori", cioè $A \times B \times C$, $A \times B \times C \times D$ etc, intesi rispettivamente come l'insieme di tutte le terne ordinate in cui la prima entrata è scelta in A, la seconda in B, la terza in C, oppure le quaterne ordinate in cui la prima entrata è scelta in A, la seconda in B, la terza in C e la quarta in D, etc.

Nella scuola secondaria, il concetto di prodotto cartesiano è presente in praticamente tutti i singoli argomenti di Matematica, ma non viene quasi mai citato esplicitamente. Per esempio, quando si considera la somma tra due numeri reali (o razionali, o naturali) quel che davvero si fa è partire da una coppia ordinata (a, b) di numeri reali (cioè, un elemento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) e costruire un numero reale in sua corrispondenza (l'elemento $a+b$, detto somma di a e b). E' per questo che poi si enuncia esplicitamente la commutatività della somma: partendo dalle coppie ordinate (a, b) o (b, a), si ottiene lo stesso elemento (la stessa somma) $a+b$. Normalmente, la parte che riguarda il coinvolgimento del concetto di coppia ordinata viene "nascosta" per evitare di introdurre complicazioni, e si dice semplicemente $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a+b = b+a$.

La prima occasione in cui il concetto di coppia ordinata viene utilizzato più significativamente, ma in genere non esplicitamente, è quando nel primo anno di scuola superiore vengono studiati i sistemi di equazioni in più incognite (tipicamente, in due incognite):

***Esercizio* 54.** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 4 \\ x - 3y & = 5 \end{cases}$$

Svolgimento. Cosa si debba intendere con *sistema* è già stato detto: si tratta di determinare l'intersezione tra gli insiemi delle soluzioni dei problemi che lo costituiscono. Perciò, l'attenzione si sposta sui problemi costituenti: qui, sono rispettivamente $2x + 3y = 4$ e $x - 3y = 5$. Ciascuno di essi è un'equazione di primo grado, solo che è in *due* incognite: x e y. La prima domanda cui rispondere, perciò, è: *cosa devo intendere come soluzione di* $2x + 3y = 4$*?*

Ovviamente, l'insieme in cui x ed y devono essere scelti è tacitamente assunto essere $\mathbb{R}$, come in (quasi) tutti i problemi di scuola secondaria. Il fatto è che, essendoci due incognite, una soluzione non può consistere di un numero reale: ce ne devono essere due, da assegnare a ciascuna incognita. Per esempio, dire che 1 è una soluzione dell'equazione $2x + 3y = 4$ non ha alcun senso! Al posto di chi dovrebbe essere sostituito? Di x? Di y? Di entrambi? Ma anche affermare che 0 e 2 sono una soluzione dell'equazione $2x + 3y = 4$, pur esibendo due numeri e non uno solo, non è che abbia gran senso: a chi devo sostituire 0? A x o a y? Le cose cambiano infatti radicalmente scegliendo l'una o l'altra alternativa: se a x sostituiamo 0 e a y sostituiamo 2 si ha $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6 \neq 4$, mentre se facciamo l'inverso otteniamo $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$, che somiglia molto a ciò che ci aspettiamo essere una *soluzione* dell'equazione.

In effetti, x e y sono due incognite distinte (per cui una soluzione deve esser costituita da una coppia di valori) e giocano ruoli differenti nell'equazione (e quindi non sono interscambiabili). La corretta definizione di ciò che deve essere una soluzione dell'equazione $2x + 3y = 4$ è perciò che deve essere una coppia ordinata $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tale che $2a + 3b = 4$ (la prima entrata deve esser sostituita in x, la seconda in y). Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x + 3y = 4$ è

$$S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 4\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Possiamo riscrivere più esplicitamente tale insieme, trattando una delle due entrate come parametro. Per esempio, usando la x come parametro e scrivendo

$$S_1 = \left\{ \left(x, \frac{4 - 2x}{3} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

(palesemente un insieme con infiniti elementi). Allo stesso modo, l'altra equazione ha come insieme delle soluzioni $S_2 = \{(5 + 3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ (stavolta abbiamo usato la y come parametro), e quindi l'insieme che cerchiamo (delle soluzioni del sistema) è $S := S_1 \cap S_2$, un sottinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ovvio che, anche se $S_1, S_2 \neq \emptyset$, può ben accadere che essi siano disgiunti, e quindi che il sistema non abbia soluzioni (o, per usare il termine più comunemente usato nella scuola secondaria, che sia incompatibile).

Vediamo come determinare S: per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'elemento (coppia ordinata) $(5+3y, y)$ è un elemento di S_2, cioè una soluzione della seconda equazione; affinchè esso lo sia anche della prima, deve accadere che $2(5+3y)+3y=4$, e cioè che $y=-2/3$. Ciò vuol dire che mentre tutte le coppie ordinate $(5+3y, y)$ ottenute al variare di $y \in \mathbb{R}$ sono soluzioni della seconda equazione, solo quelle ottenute quando y vale $-2/3$ sono anche soluzioni della prima, e quindi sono in S. L'unica coppia ordinata corrispondente a $y=-2/3$ è precisamente la coppia $(3, -2/3)$, per cui $S=\{(3, -2/3)\}$.

Nella scuola secondaria, ciò viene scritto di solito come

$$S.: \begin{cases} x & = 3 \\ y & = -\frac{2}{3} \end{cases},$$

e il metodo usato nel nostro ragionamento viene detto *metodo di risoluzione per sostituzione*, anche se in genere viene presentato diversamente, da un punto di vista più computazionale e meno concettuale. Ovviamente, allo stesso risultato si sarebbe giunti partendo dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la coppia ordinata $(x, (4-2x)/3)$ è in S_1, e solo per $x=3$ la coppia ordinata corrispondente è in S.

Sono in effetti varie le tecniche possibili per risolvere un sistema, e non è questa la sede per illustrarle tutte. Il metodo di sostituzione è forse il più *"calcoloso"*, ma anche quello che ha in genere una più vasta applicabilità. Tuttavia, la cosa importante è capire che un sistema di equazioni (o disequazioni, o misto) in più incognite ha come soluzione un'insieme di coppie ordinate (o di terne, o quaterne, etc ordinate, secondo quante sono le incognite che compaiono nel sistema).

Un errore MOLTO comune è quello di guardare, invece che a coppie ordinate, ai singoli valori delle incognite, e interpretare per esempio $(3, -2/3)$ come due soluzioni: $x=3$ e $y=-2/3$!!! Ciò è palesemente un nonsense, e stupisce ancor di più vedere quanto è frequente tra gli studenti! □

C'è un punto preciso dei programmi di scuola secondaria in cui il prodotto cartesiano interviene esplicitamente: quando si introduce la cosiddetta *Geometria Analitica*: l'intuizione di Cartesio fu che è possibile riscrivere la Geometria in termini algebrici, e in ciò il prodotto cartesiano (guarda un po' da dove viene il nome!) è esattamente quel che rende possibile il passaggio. Più precisamente:

- fissato un riferimento cartesiano (di nuovo, il nome discende dal suo ideatore) si può identificare ogni punto del piano geometrico con esattamente una coppia ordinata di numeri reali. Perciò punto geometrico=coppia ordinata;
- il piano geometrico è l'insieme di tutti i suoi punti, e ogni punto è una coppia ordinata. Perciò, piano geometrico=$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- un ente geometrico è un sottinsieme di punti del piano (p.es.: una retta, un cerchio, una circonferenza, un triangolo, etc) descritto da certe proprietà, che talvolta possono essere riassunte in un'equazione. Un punto geometrico P, corrispondente alla coppia ordinata (a, b), è uno dei punti dell'ente geometrico F descritto dall'equazione $E(x, y)=0$ precisamente se $E(a, b)=0$, cioè $P \in F$ se e solo se $E(a, b)=0$. Quindi gli enti geometrici possono essere identificati con l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dell'equazione $E(x, y)=0$ (equazione in due incognite).

Ad esempio, l'equazione $y-x-2=0$ ha come insieme delle soluzioni $S=\{(a, a+2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, e se disegniamo i punti (le coppie ordinate) di S nel piano cartesiano possiamo constatare che si ottiene l'ente geometrico retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante e passante per il punto di ascissa 0 e ordinata 2. Oppure, l'equazione $x^2+y^2-1=0$ ha come insieme delle soluzioni tutte le coppie di numeri reali (punti del piano) che sono sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine degli assi. Ciò rende possibile determinare, per esempio, le eventuali intersezioni tra una retta e una circonferenza disegnate nel piano cartesiano semplicemente risolvendo il sistema tra le rispettive equazioni: un punto P del piano, di coordinate (x, y), è un punto di intersezione tra la retta r di equazione $y-x-2=0$ e la circonferenza c di equazione $x^2+y^2-1=0$ precisamente se P è un punto di r (per cui $y-x-2=0$) e anche un punto di c (per cui $x^2+y^2-1=0$), cioè esattamente se (x, y) è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} y-x-2=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} .$$

Procedendo per esempio per sostituzione, si trova che il sistema NON ha soluzioni, e quindi la retta r è esterna alla circonferenza c, senza bisogno di fare disegni!

Non è questo il luogo per approfondire gli aspetti di Geometria Analitica: questi dovrebbero essere stati svolti tecnicamente nel corso della scuola secondaria. Qui però è il caso di notare come il concetto di prodotto cartesiano è stato dato "in astratto", ma si incarna in situazioni concrete ed importanti, di cui già lo studente ha avuto esperienza diretta: ciò porta a un livello di comprensione superiore, e conferisce maggiore consapevolezza delle conoscenze acquisite; in particolare, nasce la domanda spontanea *se la geometria analitica non è che un esempio di un contesto più ampio, non potrebbero essercene altri in cui gli stessi meccanismi di fondo seguono se non le stesse logiche, almeno logiche basate sugli stessi concetti costituenti?* Beh, sì: è esattamente così. In effetti, il prodotto cartesiano è un concetto così flessibile e ampio che si può dire poco di più su di esso che valga in generale! Questo non è un difetto, ma un pregio: è proprio perchè è la creta con cui plasmare tanti oggetti differenti il motivo per il quale non si possono dare di essa descrizioni più specifiche e generali!

Definizione 13.4. Assegnati gli insiemi A, B, si dice relazione tra A e B (in quest'ordine) ogni sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Molte volte, con il termine relazione si intende automaticamente un sottinsieme non vuoto di $A \times B$: ciò per evitare di specificare ogni volta *relazione non vuota*. Tuttavia, per non sbagliare, eviteremo di attribuire un significato così stringente, e con pazienza diremo esplicitamente *relazione non vuota* quando serve.

Osservazione 13.5. Nel linguaggio comune, il termine *relazione* può essere inteso in una varietà di contesti e con significati differenti. Può essere un resoconto (*ho presentato la mia relazione*), un legame profondo tra due persone (*la loro relazione dura da 5 anni*) o poco profondo con molte persone (*sono in buone relazioni con i miei colleghi*), e tanto altro.

In Matematica, però, il concetto di relazione è quello presentato dalla definizione, e vuol dire che sono stati assegnati degli insiemi, è stato costruito un prodotto cartesiano e ne è stato selezionato un sottinsieme (vuoto o meno). Naturalmente, il fatto che si sia scelta proprio la parola *relazione* per dire sinteticamente *sottinsieme del prodotto cartesiano* non è casuale: è per cercare di esprimere formalmente che esiste un legame di qualche sorta tra gli oggetti degli insiemi A e B.

Esempio 13.6. Sia $P := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme degli interi pari. Tra gli insiemi $\mathbb{Z}$ e P c'è un legame naturale: da ogni numero $a \in \mathbb{Z}$ possiamo costruire un elemento di P, semplicemente moltiplicandolo per 2. Questo legame può essere espresso tramite il concetto appena visto, introducendo la relazione

$$\mathscr{R} := \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times P.$$

$\mathscr{R}$ è una relazione tra $\mathbb{Z}$ e P. Similmente, $\mathscr{S} := \{(p, p+1) \mid p \in P\}$ è una relazione tra P e $\mathbb{Z}$.

Esempio 13.7. Sia S l'insieme degli studenti di un istituto scolastico, e D l'insieme dei docenti dello stesso istituto. Possiamo esprimere formalmente la relazione che intercorre tra studenti e docenti nella forma di sottinsieme $\mathscr{R} \subseteq S \times D$: costruiamo $\mathscr{R}$ considerando come suoi elementi le sole coppie $(s, d) \in S \times D$ per cui lo studente s ha d come docente. Si noti che, a differenza di prima, ci possono essere molti studenti, anche di classi diverse, che hanno lo stesso docente; così pure, fissato lo studente s, ci possono essere molti docenti d che hanno lo studente s tra i loro studenti.

Potremmo continuare a fornire esempi di relazioni, ma dovrebbe esser chiara una cosa: per quanto generale, il concetto matematico di *relazione* ha un senso molto più preciso di quello del linguaggio comune, dal quale pure nasce. Quando si incontrerà la frase *relazione tra gli insiemi A e B* il pensiero deve automaticamente leggerla per quello che è il suo significato esatto: è stato assegnato un sottinsieme di $A \times B$ (A e B in quest'ordine!).

Per il resto, la notazione che si usa per denotare che una coppia ordinata è membro della relazione fissata è modellata sul linguaggio ordinario:

Definizione 13.8. Sia $\mathscr{R} \subseteq A \times B$, e siano $a \in A$, $b \in B$. Se $(a, b) \in \mathscr{R}$, diciamo che a è in relazione $\mathscr{R}$ con b, e scriviamo $a\mathscr{R}b$. Se $(a, b) \notin \mathscr{R}$, scriveremo invece sinteticamente $a\not\mathscr{R}b$ e diremo che a non è in relazione $\mathscr{R}$ con b.

Esempio 13.9. Tornando all'esempio $\mathscr{R} = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times P$, scriveremo per esempio che $2\mathscr{R}4$ per dire che $(2, 4) \in \mathscr{R}$; invece scriveremo $2\not\mathscr{R}6$ perchè $(2, 6) \notin \mathscr{R}$.

Come per il prodotto cartesiano dal quale nasce, il concetto di relazione è troppo generico; la sua vera forza, come per il prodotto cartesiano, è proprio la sua flessibilità, che lo rende adatto a rappresentare varie situazioni. Imponendo a una relazione condizioni aggiuntive che devono essere soddisfatte si ottengono oggetti matematici più specifici. Esamineremo nelle prossime sezioni due tipi speciali di relazioni, che rendono con precisione concetti generali già incontrati in modo più informale nella scuola secondaria.

***Esercizio* 55.** Sia A un insieme ed $\mathscr{R}$ *una relazione non vuota* su A (cioè una relazione $\mathscr{R} \subseteq A \times A$), che soddisfa la seguente proprietà: *Per ogni scelta di a e b in A, se a è in relazione $\mathscr{R}$ con b e b è in relazione $\mathscr{R}$ con a allora $a = b$.* Stabilire quale delle seguenti affermazioni sono vere o false.

(1) Possono esistere due elementi distinti a e b in A tali che a sia in relazione con b.
(2) Se b è in relazione con a allora a è uguale a b.
(3) Possono esistere due elementi distinti a e b in A tale che b è in relazione con a.
(4) Esistono a e b in A distinti tali che a è in relazione con b e b è in relazione con a .

Svolgimento. Ci sono importanti relazioni che soddisfano la proprietà enunciata (che si chiama *proprietà antisimmetrica* di una relazione).

L'affermazione ci dice che se $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}a$, cioè se entrambe le coppie ordinate (a, b) e (b, a) sono in $\mathscr{R}$, allora in realtà $a = b$. Quindi se scegliamo due elementi distinti $a \neq b$ in A, NON può accadere che $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}a$: almeno una delle due scritture DEVE essere falsa (ma eventualmente, anche entrambe!).

L'affermazione (1), perciò, è vera (anche se dipende da quella che è la relazione!). Più precisamente, esistono relazioni che soddisfano la proprietà antisimmetrica e in cui la (1) è vera: un esempio facile è prendere $A := \{1, 2\}$ e considerare la relazione $\mathscr{R} := \{(1, 1), (1, 2)\}$. La proprietà antisimmetrica è soddisfatta: se (a, b) e (b, a) sono entrambe in $\mathscr{R}$, allora $(a, b) = (b, a) = (1, 1)$, e quindi $a = b = 1$. Però, $1\mathscr{R}2$ anche se $1 \neq 2$.

L'affermazione (2) è falsa: non possiamo concludere che $a = b$ sapendo solo che $b\mathscr{R}a$. Nell'esempio qui sopra, per $a = 2$ e $b = 1$ è vero che $1\mathscr{R}2$, ma lo stesso $1 \neq 2$. Attenzione: il fatto che l'implicazione sia falsa non vuol dire che per certe relazioni specifiche non possa diventare vera! Per esempio, se consideriamo la relazione $\mathscr{S} := \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, essa è chiaramente antisimmetrica (è soddisfatta la proprietà antisimmetrica) e, per come è costruita, se $b\mathscr{S}a$ allora $b = a$! Il fatto è che dalla sola ipotesi che $\mathscr{R}$ è *una* relazione antisimmetrica su A NON possiamo dedurre che $b\mathscr{R}a \Rightarrow b = a$!

Per l'affermazione (3) valgono le stesse considerazioni fatte per (1): il fatto che valga la proprietà antisimmetrica non esclude che ci possano essere elementi distinti a, b tali che $(b, a) \in \mathscr{R}$ e però $(a, b) \notin \mathscr{R}$.

L'affermazione (4) è falsa: essendo essa la negazione della proprietà antisimmetrica, se supponiamo che quest'ultima valga per $\mathscr{R}$, la sua negazione (4) è automaticamente falsa: se a e b sono distinti, NON può accadere che (a, b) e (b, a) siano entrambe in $\mathscr{R}$. □

14. Funzioni

Nella scuola superiore, il concetto di *funzione* è generalmente introdotto come una legge f che a una variabile indipendente x associa un numero reale $y = f(x)$. Per esempio, si scrive *"data la funzione $y = x^2 - 2x\dots$"*. Talvolta si assegna in questo modo la funzione e si chiede di determinarne l'insieme di definizione, per esempio

***Esercizio* 56.** *Determinare l'insieme di definizione della funzione*

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}.$$

Va ricordato, però, che i contenuti di Matematica della scuola superiore sono funzionali al contesto e agli obiettivi della scuola superiore, non alla piena generalità. Se si vuole fare un discorso più preciso, nella scuola secondaria il concetto di funzione è limitato al seguente contesto:

- la formalizzazione di una legge, tipicamente rappresentata da una formula, in cui c'è una variabile indipendente (tipicamente, x) e una variabile dipendente (tipicamente, y);
- i valori assunti dalla variabile indipendente variano in $\mathbb{R}$, o in un ragionevole sottinsieme di $\mathbb{R}$ (nel caso della funzione precedente, $x \in]-3, 1[\cup [2, +\infty[$, il suo insieme di definizione).

Dopodichè, si considerano vari tipi di funzioni, dalle funzioni polinomiali a quelle trigonometriche (p.es.: $y = \cos x$), logaritmiche (p.es. $y = \log_5(x)$), esponenziali (p.es. $y = e^{2x-3}$), etc, si impara (in taluni istituti) a disegnarne il grafico, e si considerano vari aspetti computazionali ad esse legati.

Non c'è nulla di sbagliato in ciò, ma quel che è adeguato a un certo contesto non è detto che lo sia in un contesto più generale. Più precisamente, nasce l'esigenza di capire con più precisione

(1) cosa dobbiamo intendere con una legge? Una formula matematica da soddisfare? Se sì, perchè $y = \pm\sqrt{x}$ NON è una legge valida (come abbiamo imparato a disconoscere nella scuola secondaria)?

(2) Il concetto di funzione è limitato solo ai numeri reali? In effetti, se fisso la legge $y =$ padre di x, sto definendo una funzione o no? E con la legge $y =$ genitori di x, sto definendo una funzione o no? Se no, perchè, di preciso?

Come in tutti gli altri casi, per essere precisi serve una definizione rigorosa, e per essere generale essa deve anche abbracciare tutti i possibili casi. La definizione che ci serve è la seguente:

Definizione 14.1. Siano A, B insiemi non vuoti e f una relazione tra A e B. Si dice che f è una funzione da A in B se

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \qquad \text{tale che } (a, b) \in f.$$

Quindi, una funzione da A in B non è altri che una relazione (un sottinsieme di $A \times B$), necessariamente non vuota, con una qualità speciale che deve essere verificata. Precisamente, deve succedere che ciascun elemento $a \in A$ è la prima entrata di esattamente una delle coppie ordinate membri di f. La legge che cercavamo è costituita precisamente dal criterio che abbiamo scelto per formare le coppie ordinate (a, b) che costituiscono $f \subseteq A \times B$, selezionando una $b \in B$ per ciascun elemento di A. A volte ciò è realizzato meccanicamente con una formula, altre volte no.

Esempio 14.2. Siano $A := \{1, 2\}$, $B := \{a, b, c\}$, e consideriamo i sottinsiemi (relazioni) $f, g \subseteq A \times B$ seguenti:

$$f := \{(1, a),\ (2, a)\} \qquad g := \{(1, a),\ (2, a),\ (1, b)\}$$

Si ha che f è una funzione da A in B, perchè $\varnothing \neq f \subseteq A \times B$, e nell'elenco delle coppie ordinate che la costituiscono ciascun elemento di A (cioè 1 e 2) compare esattamente una volta come primo elemento. Detta a parole, la legge può essere espressa, in questo caso, come la funzione costante che a ogni elemento di A associa l'elemento a di B.

La relazione g, invece, NON è una funzione, perchè l'elemento $1 \in A$ compare come prima entrata di due coppie ordinate in g: $(1, a)$ e $(1, b)$. Ciò non rispetta la richiesta della della definizione di funzione, e quindi g resta una relazione, ma NON è una funzione.

Esempio 14.3. Sia $A := \{1, 2, 3, 4\}$, e consideriamo

$$f := \{(1, 1),\ (2, 3),\ (3, 4)\} \qquad g := \{(1, 1),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 1)\}.$$

Tanto f che g sono relazioni non vuote tra A e sè stesso (non è detto da nessuna parte che non si possano considerare prodotti cartesiani $A \times A$!), ma f NON è una funzione da A in A: l'elemento $4 \in A$ non compare come primo elemento di una delle coppie ordinate che costituiscono f.

Invece g è una funzione di A in sè; tuttavia non c'è una *"formula"* per descrivere la legge – il meglio che possiamo fare è specificare, elemento per elemento, quale deve essere la sua *"compagna"* da inserire come seconda entrata della rispettiva coppia ordinata. Qui, 4 è la seconda entrata tanto per la coppia ordinata che comincia per 1 che per quella che comincia con 4, mentre all'elemento 2 spetta seconda entrata 3 e all'elemento 3 spetta seconda entrata 4.

Nella pratica, possiamo rendere la notazione più semplice ed efficace che elencare TUTTE le coppie ordinate della relazione f:

(1) come prima cosa, per specificare che f è una funzione da A in B scriviamo $f : A \to B$. In questo modo specifichiamo non solo che f è un sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ (una relazione tra A e B), ma anche che è non vuoto e che rispetta la condizione della definizione 14.1 (l'utilizzo della freccia $\to$ – diversa dalla freccia $\Rightarrow$ – è una notazione riservata al solo caso di *funzioni*);

(2) invece che scrivere la seconda entrata dell'unica coppia ordinata di f che ha come prima entrata a è b, troppo lungo da riportare ogni volta, scriviamo più sinteticamente $b = f(a)$.

Talvolta sarà possibile specificare b tramite una formula, altre volte no. Se la possibilità c'è, possiamo usare una variabile x e rappresentare la formula scrivendo esplicitamente $f(x)$: il valore corrispondente al valore $a \in A$ è allora ottenuto come $f(a)$. In ogni caso, rimarchiamo che non ha senso parlare di funzione, ma solo di funzione da un insieme ad un altro insieme: se non si specificano gli insiemi A e B, non stiamo parlando di funzione più di quanto, senza specificare le quantificazioni, parliamo di $x^2 = x$ come di una proposizione!

Rivediamo gli esempi di prima alla luce di questa notazione:

Esempio 14.4. Nell'esempio 14.2, la funzione f può essere rappresentata da

$$f: \begin{array}{ccc} \{1,2\} & \to & \{a,b,c\} \\ x & \to & a \end{array}.$$

Con ciò si intende

(1) che f è una funzione (dal fatto che compare la scrittura $f : \square \to \square$), che va da $\{1, 2\}$ in $\{a, b, c\}$, e
(2) a ogni elemento di $\{1, 2\}$ associa l'elemento $a \in \{a, b, c\}$, cioè secondo la formula $f(x) = a$ (è una funzione *costante*).

Nell'esempio 14.3, invece, per la funzione g NON abbiamo a disposizione una formula esplicita per $g(x)$, e non possiamo fare di meglio che specificare elemento per elemento di $A = \{1, 2, 3, 4\}$ quali sono i valori $g(x)$:

$$g: \begin{array}{rcl} \{1,2,3,4\} & \to & \{1,2,3,4\} \\ 1,4 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 4 \end{array}$$

Si dovrebbe comprendere, ora, cosa si intendeva nella scuola superiore nello scrivere la funzione $y = x^2 - x$ senza ulteriori specifiche:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 - x \end{array},$$

cioè il sottinsieme di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ costituito da tutte le coppie ordinate (x, x^2-x) ottenute al variare di $x \in \mathbb{R}$, per esempio $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, -1/4)$, $(\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ etc (non le possiamo scrivere tutte!). Cioè, secondo la definizione 14.1, la relazione

$$f = \{(x, x^2 - x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Esempio 14.5. Dovrebbe risultare ora chiaro perchè la *"legge"* $y = \pm\sqrt{x}$ non è valida per poter parlare di *funzione*: come prima cosa, se $x = -1$ (più in generale se $x < 0$) non c'è una coppia ordinata di prima componente -1, perchè semplicemente $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ (cioè, non esiste un numero reale il cui quadrato è -1, e quindi non si può formare la coppia ordinata $(-1, ?)$).

Questo si potrebbe risolvere "riducendo" l'insieme di partenza, e considerando quella data come una regola per definire una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, ma nemmeno facendo ciò si ottiene una funzione: prendendo sia $\sqrt{x}$ che $-\sqrt{x}$ si otterrebbero due coppie ordinate in corrispondenza di ogni $x > 0$, p.es. ci sarebbero sia $(1, 1)$ che $(1, -1)$, contro il fatto che, per avere una funzione, ci deve essere in f una sola coppia ordinata di prima entrata 1, e questo per ogni $x \in [0, +\infty[$.

Per inciso: $f(x) := \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$ può essere usata per definire una funzione, ma non da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, nè da $[0, +\infty[$ in $\mathbb{R}$, bensì da $[0, +\infty[$ in $\wp(\mathbb{R})$, insieme delle parti di $\mathbb{R}$: al numero reale $x \geqslant 0$ associamo il sottinsieme $\{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R}$. Come si può controllare, $f : [0, +\infty[\to \wp(\mathbb{R})$ è una funzione, ma non rientra tra quelle considerate nella scuola secondaria. $\square$

Esempio 14.6. Tornando all'esercizio 56, vediamo di capire cosa voleva dire la sua richiesta: chiaramente, visto che compare la parola *funzione*, vogliamo usare la formula per definire una funzione che, essendo il contesto quello della scuola secondaria, deve essere del tipo $f : A \to \mathbb{R}$ (per un opportuno $A \subseteq \mathbb{R}$). Non può essere $A = \mathbb{R}$: per esempio, se $x = 1$ allora $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$ (cioè: il valore del denominatore ottenuto sostituendo alla variabile x il valore 1 è nullo) e l'espressione perde di significato. Ma nemmeno per $x = -4$ l'espressione ha senso, per un altro motivo: la frazione sotto radice ha senso, perchè per $x = -4$ essa vale $-6/5$, il problema è che non ha senso $\sqrt{-6/5}$, perchè il radicando è negativo e non ci sono numeri reali il cui quadrato è $-6/5$.

La domanda dell'esercizio perciò intende *qual è il più grande sottinsieme di $\mathbb{R}$ tale che l'assegnazione $x \to \sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}$ definisce una funzione a valori in $\mathbb{R}$?* Ovviamente, *il più grande* è relativo al confronto naturale tra sottinsiemi dato dall'inclusione.

Poichè, affinchè l'espressione scelta per la seconda coordinata della coppia $(x, f(x))$ abbia senso, occorre e basta che il radicando sia $\geqslant 0$, la risposta si ottiene risolvendo la disequazione

$$\frac{x-2}{x^2+2x-3} \geqslant 0,$$

ottenendo appunto $A =]-3, 1[\cup [2, +\infty[$, come annunciato precedentemente. $\square$

Tanto per rimarcare il concetto di funzione, ed evitare alcuni comuni malintesi, consideriamo il seguente

***Esercizio* 57.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Stabilire quale delle seguenti affermazioni sono vere o false:

(1) Può esistere un elemento di B che è associato ad elementi distinti di A;
(2) Può esistere un elemento di A che è associato ad elementi diversi di B;
(3) Ogni elemento di B è associato ad un unico elemento di A;
(4) Ogni elemento di B è associato ad almeno un elemento di A.

Svolgimento. Ricordiamo cosa vuol dire che $f : A \to B$ è una funzione: è una relazione in $A \times B$ che soddisfa la proprietà

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \qquad (a, b) \in f,$$

e in tal caso per ogni $a \in A$ denotiamo con $f(a)$ l'elemento di B che compare come seconda componente dell'unica coppia ordinata nella relazione avente come prima coordinata a.

Dato che ogni elemento di A deve essere la prima coordinata di esattamente una coppia in f, in particolare non esistono elementi di A che non sono associati ad alcun elemento di B, e non esistono elementi di A associati a più di un elemento di B (o f non sarebbe una funzione!).

Con la definizione del concetto di *funzione* sotto gli occhi, controlliamo una per una le affermazioni:

(1) Vera: a ogni elemento di A deve essere associato un unico elemento di B, ma ciò NON vieta che elementi distinti di A abbiano come elemento associato lo stesso elemento di B. Questo capita, per esempio, per le funzioni costanti, ma anche per la funzione g dell'esempio 14.3 (dove $g(1) = g(4) = 1$).
(2) Falsa: ogni elemento di A è associato ad un unico elemento di B, per cui se la coppia (a, b) è una delle coppie della relazione, non ci può essere anche la coppia (a, b') dove $b' \neq b$.

(3) Falsa: la definizione del concetto di funzione non impone tale condizione agli elementi di B, e ci possono ben essere elementi di B che non sono associati ad alcun elemento di A (per esempio, per la funzione f dell'Esempio 14.2 non c'è alcun elemento di A associato all'elemento b di B, nè all'elemento c di B), nè tantomeno ad un unico elemento di A.

(4) Falsa: per lo stesso motivo di prima, la definizione del concetto di funzione non impone condizioni agli elementi di B, ma solo che ogni elemento di A abbia esattamente un "compagno" in B. Ci possono essere invece elementi di B che non "accompagnano" alcun elemento di A, e altri elementi di B che invece "accompagnano" più di un elemento di A. □

Per le funzioni c'è tutta una terminologia specifica, da imparare perchè è usata sempre: assegnata perciò una funzione $f : A \to B$,

(1) l'insieme A è detto il dominio della funzione; talvolta, vien detto insieme di partenza della funzione. Non c'entra nulla (o c'entra poco) con il cosiddetto insieme di definizione della funzione: le funzioni

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x \end{array}$$

hanno domini diversi (per f è $\mathbb{R}$, per g è $\mathbb{Z}$), ma lo stesso insieme di definizione (il massimo sottinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la legge $f(x) = x$ definisce una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è tutto $\mathbb{R}$. Incidentalmente, si noti che il cosiddetto insieme di definizione non è nè il dominio di f, nè quello di g);

(2) l'insieme B è detto il codominio della funzione, o talvolta il suo insieme d'arrivo; è in sostanza l'altro insieme che consideriamo per la formazione del prodotto cartesiano che costituisce la base su cui costruiamo la funzione;

(3) se $a \in A$, l'elemento $f(a) \in B$, cioè la seconda entrata dell'unica coppia ordinata di prima entrata a, è detto l'immagine di a nella funzione f. Per esempio, l'immagine di 2 nella funzione f dell'esempio 14.2 è a, e coincide con l'immagine dell'elemento 1 in f: infatti, si ha $f(1) = a = f(2)$;

(4) se $b \in B$ è un elemento del codominio, l'insieme

$$\{a \in A \mid f(a) = b\}$$

è un sottinsieme del dominio, precisamente quello costituito da tutti gli elementi di a che hanno come immagine b, ed è detto controimmagine (o anche preimmagine) dell'elemento b. Di solito è denotato con $f^{-1}(b)$, cosa che causa sovente molta confusione negli studenti, ma che non approfondiamo qui.

(5) Mentre OGNI $a \in A$ ha esattamente UNA immagine (altrimenti f non è una funzione!), può facilmente capitare che un elemento $b \in B$ non abbia alcuna controimmagine (cioè, che $f^{-1}(b) = \varnothing$). Per esempio, sempre per la funzione f dell'esempio 14.2, si ha

$$f^{-1}(a) = \{1, 2\}, \qquad f^{-1}(b) = \varnothing = f^{-1}(c).$$

(6) La terminologia (immagine, controimmagine) adottata per i singoli elementi di (rispettivamente) dominio e codominio può essere estesa ai sottinsiemi di (rispettivamente) dominio e codominio:
   - se $X \subseteq A$, diciamo immagine di X in f l'insieme (sottinsieme di B)

     $$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\},$$

     costituito dalle immagini di tutti gli elementi di X. Chiaro che se $X = \varnothing \Rightarrow f(X) = \varnothing$, ma se $X \neq \varnothing \Rightarrow f(X) \neq \varnothing$: infatti $X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow f(X) \neq \varnothing$.

- Ovviamente (per $X = A$) risulta $f(A) \subseteq B$, ma NON è affatto detto che $f(A) = B$! L'insieme $f(A)$ si chiama l'immagine della funzione (accorciando cioè la scrittura *immagine del dominio in* f). Per esempio, nell'esempio 14.2, si ha che $f(\{1,2\}) = \{a\}$, cioè l'immagine della funzione f è il sottinsieme proprio $\{a\}$ del codominio B.
- Se $Y \subseteq B$, diciamo controimmagine di Y in f l'insieme (sottinsieme di A)
$$f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\},$$
costituito cioè da tutti gli elementi a del dominio la cui immagine $f(a)$ è un elemento di Y.
- Chiaro che $Y = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(Y) = \varnothing$, ma può ben accadere che $Y \neq \varnothing$ e tuttavia $f^{-1}(Y) = \varnothing$. Per esempio, basta selezionare un qualunque elemento b non nell'immagine di f (cioè, un elemento di $B \setminus f(A)$) e costruire $Y := \{b\}$ per avere che $Y \neq \varnothing$ ma $f^{-1}(Y) = \varnothing$.
Ovviamente, $f^{-1}(B) = A$, perchè $f^{-1}(B)$ dev'essere (per definizione!) un sottinsieme di A, e d'altra parte (sempre per definizione, ma di funzione) per ogni $a \in A$ risulta $f(a) \in B$, e quindi $A \subseteq f^{-1}(B)$.

Quando introduciamo un concetto, perchè sia ben identificato deve essere possibile riconoscere quando due oggetti corrispondenti a quello stesso concetto sono uguali o diversi: questo abbiamo fatto per gli insiemi (abbiamo definito cosa intendere con $A = B$ e con $A \neq B$), e questo abbiamo fatto per le coppie ordinate (definendo cosa vuol dire che $(a,b) = (c,d)$ e cosa vuol dire $(a,b) \neq (c,d)$); questo dobbiamo fare per le funzioni. La definizione che segue è conseguente alla definizione di funzione come relazione, ma la enunciamo direttamente per come viene usata in pratica:

Definizione 14.7. Assegnate le funzioni $f : A \to B$ e $g : C \to D$, diciamo che esse sono uguali, e scriviamo $f = g$, se e solo se

(1) $A = C$ (f e g hanno lo stesso dominio);
(2) $B = D$ (f e g hanno lo stesso codominio);
(3) per ogni $x \in A$ risulta $f(x) = g(x)$.

Automaticamente, dire che $f \neq g$ vuol dire che o hanno domini diversi, o hanno codomini diversi o (ed è il caso più interessante e da aver chiaro) sono entrambe funzioni da A in B, ma $\exists a \in A$ tale che $f(a) \neq g(a)$.

Esempio 14.8. Consideriamo le funzioni
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & |x| \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{x^2} \end{array}.$$
A dispetto del fatto che la *legge di formazione* sia diversa, nelle sue scritture, risulta $f = g$:

- f e g hanno lo stesso dominio e lo stesso codominio, e
- per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) = g(x)$, perchè se $x \geqslant 0$ si ha $f(x) = |x| = x = \sqrt{x^2} = g(x)$, e se $x < 0$ risulta $f(x) = |x| = -x = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = g(x)$. □

In talune circostanze, è possibile costruire nuove funzioni a partire da funzioni date più o meno allo stesso modo con cui si possono costruire nuovi insiemi con le operazioni insiemistiche. Più precisamente, è possibile costruire la *somma* di funzioni, e il loro *prodotto*, ma solo in circostanze abbastanza speciali (per esempio, per funzioni reali definite sullo stesso dominio), e non le considereremo in queste note.

Un'operazione molto più generica e rilevante è invece la seguente:

Definizione 14.9. ***(Prodotto di composizione)***
Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funzioni assegnate. Se $f(A) \subseteq C$, si dice funzione f composto g (f e g nominate in quest'ordine!), e si denota con $g \circ f$ (notare l'ordine di scrittura!), la funzione

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \to & D \\ a & \to & g(f(a)) \end{array} .$$

In pratica, come è costruita la composizione di f con g? A ogni elemento a di A dobbiamo associare un unico elemento di D, e lo facciamo usando f e g: infatti se $a \in A \Rightarrow$ c'è un unico elemento $b := f(a) \in f(A) \subseteq B$ associato ad a tramite f; poichè però $f(A) \subseteq C \Rightarrow$ b è anche un elemento di C, e quindi ad esso è associato un unico elemento $g(b)$ di D. Allora possiamo associare a ciascun elemento $a \in A$ l'elemento $g(b) = g(f(a)) \in D$, ottenendo una funzione.

***Esercizio* 58.** Siano

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 - 1 \end{array} , \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 + 1 \end{array} .$$

Dire se le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ sono definite, e determinarle esplicitamente.

Svolgimento. Non c'è dubbio che tanto $g \circ f$ che $g \circ f$ siano definite, dato che $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} =$ dominio di g e la stessa cosa vale per $g(\mathbb{R})$. Si ha poi $f(x) = x^2 - 1 =: y$ e $g(y) = y^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 + 1 = x^4 - 2x^2 + 2$, per cui $g \circ f$ è la funzione che va da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e associa a $x \in \mathbb{R}$ il numero reale $x^4 - 2x^2 + 2$.

Con gli stessi argomenti, si vede che $f \circ g$ è la funzione da $\mathbb{R}$ in sè che associa al numero reale x il numero reale $x^4 + 2x^2$:

$$x \xrightarrow{g} x^2 + 1 \xrightarrow{f} (x^2 + 1)^2 - 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

Pertanto, $g \circ f \neq f \circ g$: al numero reale $x = 0$ la prima funzione associa il numero 2, la seconda il numero 0. □

***Esercizio* 59.** Siano

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 - 1 \end{array} , \qquad g : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{x} \end{array} .$$

Dire se le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ sono definite, e determinarle esplicitamente.

Svolgimento. $g \circ f$ NON è definita: infatti $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$ (verificare!), e quest'immagine non è contenuta nel dominio di g. Per esempio per $x = 0$ si ha $f(0) = -1$, e quindi non sono rispettate le condizioni per poter definire la funzione composta $g \circ f$ – essenzialmente, a ogni elemento $x \in]-1, 1[$ corrisponde un elemento $f(x)$ non nel dominio di g, a cui quindi non può essere associata un'immagine tramite g.

Invece, $f \circ g$ è definita. Sappiamo che una delle proprietà dei numeri reali è che se $y \geqslant 0$ allora $\exists! x \geqslant 0$ tale che $y = x^2$: questo unico numero reale x è quel che si chiama *radice aritmetica* del numero reale y, e si scrive $x = \sqrt{y}$. Perciò $g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ (verificare anche quest'uguaglianza!), e quindi l'immagine di g è un sottinsieme del dominio di f $\Rightarrow$ ha perfettamente senso considerare la funzione composta $f \circ g$; precisamente,

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x - 1 \end{array} \quad \text{e precisamente } x \xrightarrow{g} \sqrt{x} \xrightarrow{f} (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$$

(sappiamo infatti che $(\sqrt{x})^2 = |x| = x$, essendo $x \geqslant 0$). □

Molto altro può essere detto sul concetto di funzione: altro circa le proprietà significative (iniettività, suriettività, bigettività), altro circa i modi efficaci di rappresentare le funzioni, soprattutto se tra insiemi finiti (come parole, come array, tramite il modello di occupazione, etc), nonchè altro circa il concetto di prodotto di composizione (funzioni identità, invertibilità di una funzione e funzione inversa di una funzione invertibile), altro anche nel solo caso di funzioni reali di variabili reali (continuità, derivabilità, integrabilità) e tanto altro. Tuttavia questi concetti più articolati verranno esaminati più propriamente nei corsi universitari di Matematica, per cui ce ne asteniamo al momento. Qui, la cosa da afferrare e tenere ben salda è la definizione rigorosa di funzione, con la consapevolezza di poter tornare ad essa per chiarire pienamente tutti i possibili dubbi che nascano da nozioni successive.

15. Relazioni di equivalenza

L'unico altro tipo speciale di relazione che vediamo in queste brevi note non è legato alla necessità di "collegare" tra loro oggetti potenzialmente di tipo diverso (nodo centrale del concetto di funzione), ma di stabilire la "rimpiazzabilità" di un oggetto di un insieme con un altro oggetto dello stesso insieme senza alterare significativamente la situazione.

Per esempio, se la mia penna smette di funzionare, posso chiedere a un collega *"Hai una penna da prestarmi?"*: non ho bisogno che riprenda a funzionare la specifica penna che ho usato sinora, ma di una qualunque che la rimpiazzi in modo che io possa continuare a scrivere. Da questo punto di vista, una penna vale l'altra. Ciò anche se la penna che usavo era d'oro e quella ricevuta in prestito è una penna qualunque in plastica: *limitatamente al mio scopo, una penna vale l'altra se mi permette di raggiungerlo.*

La formalizzazione di questo processo di rimpiazzare un oggetto con un altro, magari diverso ma funzionale allo stesso scopo, è la seguente

Definizione 15.1. ***(Relazione di equivalenza)***
Sia A un insieme non vuoto, e $\mathscr{R}$ una relazione su A (cioè, $\mathscr{R} \subseteq A \times A$). Diciamo che $\mathscr{R}$ è una relazione di equivalenza su A se essa soddisfa le seguenti proprietà:

(1) proprietà riflessiva: $\forall a \in A$ è $a\mathscr{R}a$ (semplificazione della notazione originale $(a,a) \in \mathscr{R}$). L'espressione verbale con cui si esprime la proprietà riflessiva per $\mathscr{R}$ è *ogni elemento è in relazione con sè stesso*;

(2) proprietà simmetrica: $\forall a,b \in A$ è $a\mathscr{R}b \Rightarrow b\mathscr{R}a$ (semplificazione della notazione originale $(a,b) \in \mathscr{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathscr{R}$). A parole, *se a è in relazione con b, allora b è in relazione con a*;

(3) proprietà transitiva: $\forall a,b,c \in A$, $(a\mathscr{R}b) \wedge (b\mathscr{R}c) \Rightarrow a\mathscr{R}b$ (nella notazione originale, $(a,b),(b,c) \in \mathscr{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathscr{R}$). L'espressione verbale è *se a è in relazione con b e b è in relazione con c, allora a è in relazione con c.*

Si noti che se $\mathscr{R}$ è una relazione di equivalenza sull'insieme A, automaticamente $\mathscr{R}$ è non vuota: infatti, siccome A è per definizione non vuoto (o non sussiste la definizione di *relazione di equivalenza*!) $\Rightarrow \exists a \in A \Rightarrow (a,a) \in \mathscr{R}$, e quindi almeno un elemento in $\mathscr{R}$ ci dev'essere.

Esempio 15.2. Il più immediato esempio di relazione di equivalenza su un insieme è dato dalla relazione di uguaglianza: se A è un insieme non vuoto, poniamo

$$\mathscr{R} := \{(a,a) \mid a \in A\}, \qquad \text{ovvero definiamo } \forall a,b \in A \ a\mathscr{R}b :\Longleftrightarrow \quad a = b.$$

La relazione $\mathscr{R}$ così definita soddisfa tutte e tre le richieste:

(1) per ogni $a \in A$ è ovvio che $a = a$, quindi per come è definita $\mathscr{R}$ risulta $a\mathscr{R}a$. Perciò $\mathscr{R}$ è riflessiva;

(2) per ogni $a, b \in A$, se $a\mathscr{R}b$ vuol dire che $a = b$; allora è parimenti vero che $b = a$ e, tradotto in termini di relazione $\mathscr{R}$, ciò vuol dire che $b\mathscr{R}a$. Perciò, $\mathscr{R}$ è simmetrica;
(3) per ogni $a, b, c \in A$, dire che $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}c$ vuol dire che $a = b$ e $b = c$. In tal caso, è vero che $a = c$, e quindi che $a\mathscr{R}c$; cioè, $\mathscr{R}$ è transitiva.

Naturalmente, ben poca cosa sarebbe il concetto di *relazione di equivalenza* se si riducesse al concetto di *uguaglianza*! Perciò, l'uguaglianza non è che *uno* degli innumerevoli esempi di attuazione del concetto di equivalenza. Un altro esempio, all'estremo opposto, è il seguente:

Esempio 15.3. Sia A un insieme non vuoto, e dichiariamo $\mathscr{R} := A \times A$. In tal caso, $\forall a, b \in A$ risulta automaticamente $(a, b) \in \mathscr{R}$, cioè $a\mathscr{R}b$. Detto a parole, *qualunque elemento di A è equivalente a qualunque altro elemento di A.* Se A è l'insieme delle penne, ciò costituisce precisamente il senso citato più sopra: tutte le penne sono tra loro equivalenti, anche se una è d'oro e un'altra di plastica. In particolare, due penne possono essere diverse, ma restano equivalenti tra loro.

Sono innumerevoli gli esempi di relazioni di equivalenza degne di considerazione, e ogni singolo scopo possiamo avere in mente per un insieme di oggetti dà luogo a una relazione di equivalenza. Facciamo un esempio importante:

Esempio 15.4. Sia A l'insieme di tutti i problemi.[7] Introduciamo su A una relazione: se p, q sono problemi, scriviamo $p\mathscr{R}q$ se e solo se p e q hanno lo stesso insieme delle soluzioni. Per esempio, il problema determinare i numeri reali x tali che $x^2 = -1$ e il problema determinare i numeri interi x tali che $2x = 1$ hanno lo stesso insieme di soluzioni, precisamente l'insieme vuoto. Perciò il primo problema è in relazione con il secondo, e viceversa.

Dovrebbe esser chiaro che questa relazione $\mathscr{R}$ introdotta è una relazione di equivalenza, ma verifichiamolo:

(1) chiaro che, quale che sia il problema p, $p\mathscr{R}p$, che detto a parole esprime il fatto (ovvio) che *p e p sono problemi che hanno le stesse soluzioni*;
(2) altrettanto chiaro che se $p\mathscr{R}q$, ciò vuol dire che i problemi p e q hanno le stesse soluzioni, e quindi q e p hanno le stesse soluzioni (non è importante chi nominiamo per primo!), cioè $q\mathscr{R}p$;
(3) infine, se $p, q, r \in A$ sono assegnati problemi e $p\mathscr{R}q$ e $q\mathscr{R}r$, ciò vuol dire che p e q hanno le stesse soluzioni, e che q ed r hanno le stesse soluzioni. Perciò anche p ed r hanno le stesse soluzioni, ed è quindi vero che $p\mathscr{R}r$.

Quindi $\mathscr{R}$ è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè è una relazione di equivalenza.

Questo esempio è importante perchè, in genere, può non essere semplice decidere se due problemi sono o non sono equivalenti, ma se si sa che lo sono allora possiamo di permetterci di scegliere tra essi quello più facile da risolvere (il cui insieme delle soluzioni è il più facile da determinare!), anche se non è il problema originale dal quale partivamo. Ci sono, in effetti, criteri che se applicati per trasformare un assegnato problema garantiscono che il problema ottenuto dalla trasformazione sarà pure diverso da quello di partenza, ma è ad esso equivalente, e quindi ciò si traduce in una semplificazione del problema senza perdita di dati e senza introdurre soluzioni che non erano tali per il problema originale. I più noti di tali principi, nella formulazione come equazioni o disequazioni a coefficienti reali e con soluzioni da cercare in $\mathbb{R}$, sono i seguenti:

[7] Come accennato nelle sezioni precedenti, è "pericoloso" introdurre l'insieme A in questo modo! Tuttavia, per rendere l'idea, è il modo più efficace

- primo principio di equivalenza per equazioni e disequazioni: data l'equazione (disequazione) $a = b$ (o $a \geqslant b$), l'equazione (disequazione) $a+c = b+c$ (o $a+c \geqslant b+c$) ottenuta sommando ad ambo i suoi membri la stessa quantità c è equivalente al problema di partenza;
- secondo principio di equivalenza per equazioni: data l'equazione $a = b$, l'equazione $ac = bc$ ottenuta moltiplicando ambo i suoi membri per la stessa quantità $c \neq 0$ è equivalente all'equazione di partenza;
- secondo principio di equivalenza per disequazioni: data la disequazione $a \geqslant b$, la disequazione $ac \geqslant bc$ ottenuta moltiplicando ambo i suoi membri per la stessa quantità $c > 0$ è equivalente alla disequazione di partenza. Se invece $c < 0$, la disequazione di partenza è equivalente alla disequazione $ac \leqslant bc$ (inversione del simbolo di disuguaglianza).

Queste leggi bastano per risolvere le equazioni e le disequazioni più semplici, permettendo di passare da un problema (equazione o disequazione) iniziale più complicato a problemi via via più semplici, ma garantendo l'equivalenza con il problema originale a ogni singolo passo. Per problemi più complessi, questi principi generali continuano a essere validi, ma non bastano più a fornire un problema abbastanza semplice da poter essere risolto, e si deve tener conto di altre proprietà, dei numeri reali o di altre costruzioni, per poter essere ridotti in complessità, sempre però salvaguardando l'equivalenza con il problema precedente.

***Esercizio* 60.** Risolvere la disequazione $|x-1| - |x-2| \leqslant 0$.

Svolgimento. La sola applicazione delle leggi di equivalenza per le disequazioni non basta a semplificare il problema: il meglio che possiamo fare è applicare la prima legge e dire che il problema di partenza è equivalente al problema $|x-1| \leqslant |x-2|$, dopodichè siamo fermi. Peraltro, non è nemmeno detto che quest'ultima disequazione possa essere considerata più semplice di quella di partenza: è più facile confrontare una quantità con zero, che confrontare tra loro due quantità variabili! Dobbiamo mettere altro sulla bilancia per semplificare il problema. Nel caso specifico, dobbiamo esplicitare quanto valgono $|x-1|$ e $|x-2|$, facendo *"scomparire"* il simbolo di valore assoluto che ci crea difficoltà. Ovviamente, nessuna magia è ammessa: si tratta solo di ricordare la definizione di valore assoluto e sostituire alla notazione compatta l'equivalente significato esplicito. Vediamo come farlo nel modo più efficiente possibile:

- chiediamoci quando $x-1 \geqslant 0$: applicando la prima legge di equivalenza per le disequazioni, la disequazione $x-1 \geqslant 0$ è equivalente alla disequazione $x \geqslant 1$ (ottenuta dalla precedente sommando 1 a ambo i membri), la cui soluzione è nella formulazione stessa del problema: quando $x \geqslant 1$. Perciò se $x \geqslant 1$ allora $x-1 \geqslant 0$, se invece $x < 1$ è $x-1 < 0$;
- allo stesso modo si ha che $x-2 \geqslant 0$ è equivalente a $x \geqslant 2$;
- riportiamo su un grafico come si collocano i numeri $x-1$ e $x-2$ rispetto al numero 0 al variare di x (normalmente, ciò è riassunto nella frase studiamo l'andamento del segno di $x-1$ e $x-2$): scopriamo così che
  (1) se $x < 1$, sia il numero $x-1$ che il numero $x-2$ sono < 0. Di conseguenza, se $x < 1$ si ha $|x-1| - |x-2| = 1 - x + x - 2 = -1$;
  (2) se $1 \leqslant x < 2$ risulta $x-1 \geqslant 0$, mentre $x-2 < 0$. Di conseguenza, per $1 \leqslant x < 2$ risulta $|x-1| - |x-2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$;
  (3) se $x \geqslant 2$ sia il numero $x-1$ che il numero $x-2$ sono $\geqslant 0$. Di conseguenza, se $x \geqslant 2$ è $|x-1| - |x-2| = x - 1 - x + 2 = +1$.

  Alla luce di queste informazioni, il problema originale, cioè $|x-1| - |x-2| \leqslant$

0, è equivalente al problema

$$\begin{cases} x < 1 \\ -1 \leqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ 2x-3 \leqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 1 \leqslant 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema ha ovviamente come insieme delle soluzioni l'intervallo $]-\infty, 1[$, e altrettanto chiaramente il terzo sistema ha $\varnothing$ come insieme delle soluzioni (per nessun numero reale, nè tantomeno per quelli in $[2, +\infty[$, risulta $1 \leqslant 0$!). Per il secondo sistema, si ha

$$\begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ 2x-3 \leqslant 0 \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ x \leqslant 3/2 \end{cases} ,$$

perchè la seconda disequazione, in conseguenza della prima e seconda legge di equivalenza per le disequazioni, è equivalente alla disequazione $x \leqslant 3/2$, e quindi la soluzione del secondo sistema è l'insieme $1 \leqslant x \leqslant 3/2$.

In definitiva, la soluzione del problema originale $|x-1| - |x-2| \leqslant 0$ è l'insieme $]-\infty, 1[\cup [1, 3/2] =]-\infty, 3/2]$, che possiamo anche riscrivere sinteticamente come $x \leqslant 3/2$. □

Un altro esempio di relazione di equivalenza "notevole", e che è alla base di una importante generalizzazione (che non vedremo qui!)

Esempio 15.5. Sia $X := \{1, 2, 3, 4\}$, consideriamo $A := \wp(X)$ l'insieme delle parti di X, e introduciamo su A la seguente relazione:

$$\forall a, b \in A,\ a \mathscr{R} b :\iff \ a \text{ e } b \text{ hanno lo stesso numero di elementi.}$$

Per esempio, $a := \{1, 2\}$ e $b := \{1, 3\}$ sono elementi diversi di A, ma sono in relazione tra loro, perchè sono costituiti entrambi da due elementi (e non ci interessa affatto quali sono, ma solo *quanti* sono!).

E' chiaro che la relazione $\mathscr{R}$ così introdotta è di equivalenza su A (basta verificare che sono soddisfatte le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva), per cui è una relazione di equivalenza. Questa è diversa dalla relazione di uguaglianza, e (almeno nel caso in questione) traduce formalmente quella che sarà la base su cui è costruito il concetto di *contare*: dire che un insieme ha due elementi introduce il concetto del numero *due* senza stare a dire concretamente quali sono gli oggetti costituenti un insieme con quel numero di oggetti. Cioè, per noi, un insieme con *due* mele, o *due* pere, o *due* penne, o *due* gessetti o altro sono del tutto equivalenti, per introdurre il concetto astratto del *numero* due! □

Se $a \in A$, l'oggetto a è diverso da tutti gli altri oggetti di A, ed è uguale solo a sè stesso, come sappiamo. Se però su A è stata introdotta una relazione di equivalenza $\mathscr{R}$, l'oggetto a può essere equivalente a molti altri oggetti di A, che restano distinti da a ma che ne sono validi sostituti ai nostri fini. Parafrasando ciò con l'insieme di tutti gli oggetti di cancelleria, una gomma è equivalente a ogni altra gomma (è rimpiazzabile da una qualunque altra gomma), e una penna è equivalente a ogni altra penna (perchè svolge lo stesso scopo). Gli oggetti di A equivalenti ad a formano un sottinsieme di A, detto classe di equivalenza di a rispetto la relazione $\mathscr{R}$. La definizione esatta è la seguente:

Definizione 15.6. Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su A, ed $a \in A$. Si dice classe di $\mathscr{R}$-equivalenza di a, e si denota con $[a]_{\mathscr{R}}$, l'insieme

$$[a]_{\mathscr{R}} := \{b \in A \mid b \mathscr{R} a\}.$$

E' bene notare esplicitamente che, per definizione, $a \in A$ ma $[a]_{\mathscr{R}} \subseteq A$!

Esempio 15.7. Se A è un qualunque insieme munito della relazione di uguaglianza, si ha che $[a]_{\mathscr{R}} = \{a\}$, per ogni $a \in A$. Infatti, nella relazione di uguaglianza, un oggetto $b \in A$ è equivalente ad a solo se esso è uguale ad a.

Se, all'estremo opposto, $\mathscr{R} = A \times A$, allora stiamo affermando che ogni singolo oggetto $a \in A$ è equivalente a ogni altro oggetto in A, e quindi $[a]_{\mathscr{R}} = A$ per ogni $a \in A$.

Nell'esempio degli articoli di cancelleria, la classe di equivalenza di una singola gomma è costituito dall'insieme di tutte le gomme, la classe di equivalenza di una singola penna è l'insieme costituito da tutte le penne, e così via.

Nel caso dell'insieme di tutti i problemi, la classe di equivalenza del problema $x^2 - 1 = 0$ su $\mathbb{R}$ è l'insieme costituito da tutti i problemi che hanno come insieme delle soluzioni il sottinsieme $\{-1, 1\}$ di $\mathbb{R}$. □

Per una generica relazione di equivalenza, le classi di equivalenza soddisfano alcune importanti proprietà di base:

Proposizione 15.8. *Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su A. Allora*

(1) $\forall a \in A$ *è* $a \in [a]_{\mathscr{R}}$. *In particolare, ogni classe di equivalenza è non vuota;*
(2) $\forall a, b \in A$, $a\mathscr{R}b \iff [a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$, *cioè il passaggio alle classi traduce la nozione di elementi in relazione tra loro con la nozione di uguaglianza tra le loro classi;*
(3) $\forall a, b \in A$, *se* $[a]_{\mathscr{R}} \cap [b]_{\mathscr{R}} \neq \varnothing \Rightarrow [a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$, *cioè classi di equivalenza distinte sono disgiunte;*
(4) $A = \bigcup_{a\in A}[a]_{\mathscr{R}}$, *cioè A è l'unione delle classi di equivalenza dei suoi elementi.*

Dimostrazione. Benchè semplici, le dimostrazioni di queste proprietà consentono di vedere in azione i concetti "astratti" introdotti sinora, e costituiscono quindi un buon esercizio.

(1) Per ogni $a \in A$, è $a\mathscr{R}a$ per la proprietà riflessiva soddisfatta da $\mathscr{R}$. Perciò $a \in [a]_{\mathscr{R}}$ (ricordiamo che $[a]_{\mathscr{R}} = \{b \in A \mid b\mathscr{R}a\}$). In particolare, perciò, $[a]_{\mathscr{R}}$ contiene come minicmo l'elemento a su cui è costruita e, pertanto, è certamente non vuota.
(2) Dimostriamo l'implicazione $\Rightarrow$: supponiamo che $a\mathscr{R}b$ e proviamo che $[a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$. Sia perciò $x \in [a]_{\mathscr{R}}$: ciò vuol dire che $x\mathscr{R}a$, per definizione di classe di equivalenza di a; dato che $a\mathscr{R}b$ per ipotesi, e che $\mathscr{R}$ soddisfa la proprietà transitiva $\Rightarrow x\mathscr{R}b$, cioè $x \in [b]_{\mathscr{R}}$. Pertanto, $[a]_{\mathscr{R}} \subseteq [b]_{\mathscr{R}}$. Allo stesso modo, se $y \in [b]_{\mathscr{R}}$ allora $y\mathscr{R}b$; siccome $a\mathscr{R}b$ e $\mathscr{R}$ soddisfa la proprietà simmetrica $\Rightarrow$ $b\mathscr{R}a$; per la proprietà transitiva, risulta $y\mathscr{R}a$, e quindi $[b]_{\mathscr{R}} \subseteq [a]_{\mathscr{R}}$. Avendo provato entrambe le inclusioni, possiamo concludere che $[a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$.
Dimostriamo ora l'altra implicazione, $\Leftarrow$: supponiamo che $[a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$ e proviamo che $a\mathscr{R}b$. Questa è più veloce: dato che per il punto 1) è $a \in [a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$, si ha $a \in [b]_{\mathscr{R}}$ e quindi $a\mathscr{R}b$.
Avendo dimostrato entrambe le implicazioni, la proprietà 2) è provata.
(3) Se $[a]_{\mathscr{R}} \cap [b]_{\mathscr{R}} \neq \varnothing$, vuol dire che esiste almeno un elemento $x \in [a]_{\mathscr{R}} \cap [b]_{\mathscr{R}}$; per tale x , cioè, si ha $x\mathscr{R}a$ e $x\mathscr{R}b$. Ma allora per la proprietà simmetrica risulta $a\mathscr{R}x$, e quindi per la proprietà transitiva da $a\mathscr{R}x$ e $x\mathscr{R}b$ segue $a\mathscr{R}b$. Per il punto 2), ciò vuol dire che $[a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}$.
(4) Siccome per ogni $a \in A$ è $[a]_{\mathscr{R}} \subseteq A$, l'unione di tuttte le classi di $\mathscr{R}$-equivalenza è certamente un sottinsieme di A. D'altra parte, per ogni $a \in A$, l'elemento a appartiene all'unione delle classi di $\mathscr{R}$-equivalenza, perchè quantomeno $a \in [a]_{\mathscr{R}}$.

□

Naturalmente, se fissiamo un concreto insieme A e una specifica relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ su A, le proprietà appena viste continuano a valere, ma ad esse possono aggiungersene altre, più specifiche.

Ricapitolando: fissato un insieme A, se assegniamo su A una relazione di equivalenza $\mathscr{R}$, l'insieme A viene suddiviso in tanti sottinsiemi, le classi di equivalenza, come una torta suddivisa in fette. Possiamo perciò passare dall'insieme A di partenza all'insieme costituito da tali fette (dalle classi di equivalenza): questo non è più un sottinsieme di A, come sappiamo, ma un sottinsieme di $\wp(A)$, e ha un nome specifico.

Definizione 15.9. ***(Insieme quoziente)***
Se A è un insieme, e $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su A, diciamo insieme quoziente di A rispetto la relazione $\mathscr{R}$, e lo denotiamo con $A/\mathscr{R}$, l'insieme

$$A/\mathscr{R} := \{[a]_{\mathscr{R}} \mid a \in A\}.$$

E' da rimarcare, di nuovo, che gli oggetti di $A/\mathscr{R}$ sono le classi di equivalenza, cioè sottinsiemi di A: $A/\mathscr{R}$ è una famiglia di insiemi. Quindi se $a \in A$ allora $[a]_{\mathscr{R}} \in A/\mathscr{R}$. $A/\mathscr{R}$ è l'insieme avente come oggetti tutte le distinte classi di equivalenza di A.

Esempio 15.10. Sia $A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Poniamo su A la relazione $\mathscr{R}$ definita dichiarando che per ogni $a, b \in A$ risulta $a\mathscr{R}b$ se e solo se $a-b$ è un multiplo intero di 3. Per esempio, $4\mathscr{R}7$, perchè $4 - 7 = -3$ è un multiplo di 3, e così pure $4\mathscr{R}1$ perchè $4-1 = 3$ lo è. Invece $2\not\mathscr{R}6$, perchè $2-6 = -4$ NON è un multiplo di 3.

Si ha che la relazione $\mathscr{R}$ è di equivalenza su A:

(1) $\mathscr{R}$ gode della proprietà riflessiva: per ogni $a \in A$, risulta $a - a = 0$, che è un multiplo intero di 3 ($0 = 0 \cdot 3$), per cui $a\mathscr{R}a$;
(2) $\mathscr{R}$ gode della proprietà simmetrica: se $a, b \in A$ sono in relazione, $\Rightarrow a - b$ è un multiplo intero di 3, cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = 3k$. Ma allora $b - a = 3(-k)$ è ancora un multiplo di 3, e quindi $b\mathscr{R}A$;
(3) $\mathscr{R}$ gode della proprietà transitiva: per ogni $a, b, c \in A$, se $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}c$ vuol dire che $a - b$ è un multiplo di 3, e quindi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = 3k$, e anche che $b - c$ è un multiplo di 3, per cui $\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $b - c = 3h$. Ma allora
$$a - c = 3k - 3h = 3(h - k),$$
e poichè $h - k \in \mathbb{Z}$ ciò vuol dire che anche $a - c$ è un multiplo intero di 3, ovvero che $a\mathscr{R}c$.

Dato che $\mathscr{R}$ è una relazione di equivalenza su A, si formano le classi di equivalenza, e A è ripartito tra esse: ciascun elemento di A appartiene a esattamente una di tali classi. Vediamo quali sono:

- partiamo dall'elemento più piccolo: sicuramente in $[0]_{\mathscr{R}}$ c'è 0. Chi altri? $a \in [0]_{\mathscr{R}} \iff a\mathscr{R}0 \iff a - 0$ è un multiplo intero di 3. Dato che $a - 0 = a$, in $[0]_{\mathscr{R}}$ ci sono precisamente tutti gli a che sono multipli di 3, cioè $[0]_{\mathscr{R}} = \{0, 3, 6, 9\}$.
- Vediamo chi sono gli elementi in $[1]_{\mathscr{R}}$: sicuramente c'è 1; inoltre, $a \in [1]_{\mathscr{R}} \iff a - 1 = 3k$ per qualche $k \in \mathbb{Z} \iff a = 3k + 1$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $[1]_{\mathscr{R}} = \{1, 4, 7\}$;
- similmente, si trova che $[2]_{\mathscr{R}} = \{2, 5, 8\}$.

Non ci sono altre classi: ciascun elemento di A si trova in esattamente una di queste tre classi. In particolare, si noti che $[2]_{\mathscr{R}} = [5]_{\mathscr{R}} = [8]_{\mathscr{R}}$: gli elementi $2, 5$ e 8 sono elementi distinti di A, e tali restano, però sono tutti in relazione tra loro e quindi le loro classi sono uguali, cioè le loro classi sono lo stesso elemento di $A/\mathscr{R}$. Nulla di strano, in fondo: vuol dire che avere 2, o 5 o 8 è – per quanto imposto da noi! – la stessa cosa, e ciò si concretizza NON dicendo che per esempio $2 = 5$ (che è falso!), ma che $2\mathscr{R}5$, cioè che $[2]_\mathscr{R} = [5]_\mathscr{R}$!

Si noti che la *"torta"* A è stata suddivisa in tre *"fette"*, precisamente $[0]_\mathscr{R} = \{0,3,6,9\}$, $[1]_\mathscr{R} = \{1,4,7\}$ e $[2]_\mathscr{R} = \{2,5,8\}$, ma queste non sono *"grandi uguale"*: in effetti, non è detto da nessuna parte che debbano esserlo! □

Assegnare una relazione di equivalenza sull'insieme A, dunque, fa nascere parecchi oggetti: nascono le classi di equivalenza, e dunque nasce l'insieme da esse costituito. Nasce anche una funzione, detta *proiezione canonica*, a completare una *triade* che deve essere sempre tenuta presente ogni volta che si dovesse incontrare l'incipit sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su A:

Definizione 15.11. Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza sull'insieme A; si dice proiezione canonica relativa ad $\mathscr{R}$, e si denota con $\pi_\mathscr{R}$, la funzione

$$\pi_\mathscr{R} : \begin{array}{ccc} A & \to & A/\mathscr{R} \\ a & \to & [a]_\mathscr{R} \end{array} .$$

In parole povere, $\pi_\mathscr{R}$ è la funzione che all'elemento $a \in A$ associa la sua classe di $\mathscr{R}$-equivalenza $[a]_\mathscr{R} \in A/\mathscr{R}$.

Forse un po' a sorpresa, perciò, assegnare una relazione di equivalenza fa automaticamente nascere una funzione! Ancora più sorprendentemente, in realtà, è in qualche modo vero anche il contrario: assegnare una funzione fa nascere automaticamente una relazione di equivalenza!

Proposizione 15.12. *Sia $f : A \to B$ una funzione. Consideriamo su A la relazione definita da $\forall a, b \in A$ $a \sim_f b :\iff f(a) = f(b)$. La relazione $\sim_f$ è una relazione di equivalenza su A, detta indotta da f, le cui classi di equivalenza sono dette le fibre di f. Esplicitamente, per ogni $a \in A$, risulta*

$$[a]_{\sim_f} = \{b \in A \mid f(b) = f(a)\} = f^{-1}(f(a)).$$

Dimostrazione. Anche la dimostrazione di questa proposizione è semplice, ma poichè coinvolge attivamente vari concetti introdotti precedentemente è istruttiva. Come prima cosa, verifichiamo che $\sim$ (per comodità, omettiamo la scrittura completa $\sim_f$, così come nelle classi scriveremo direttamente $[a]$ invece che $[a]_{\sim_f}$) è una relazione di equivalenza su A:

(1) $\sim$ è riflessiva: infatti per ogni $a \in A$ risulta $f(a) = f(a)$, cioè $a \sim a$;
(2) $\sim$ è simmetrica: infatti per ogni $a, b \in A$, se $a \sim b$ vuol dire che $f(a) = f(b)$, il che è lo stesso che dire $f(b) = f(a)$, e cioè $b \sim a$;
(3) $\sim$ è transitiva: per ogni $a, b, c \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim c$, ciò vuol dire che $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$, rispettivamente. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha $f(a) = f(c)$, e cioè $a \sim c$.

Ciò controllato, segue che effettivamente $\sim$ è una relazione di equivalenza su A. Nascono perciò le classi di equivalenza, e per definizione stessa si ha

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\} = \{b \in A \mid f(b) = f(a)\}.$$

Questo vuol dire (ricordando il concetto di *controimmagine* di un elemento in una funzione f, che $[a] = f^{-1}(f(a))$. □

Molto altro può esser detto circa le relazioni di equivalenza nelle specifiche situazioni: contesti specifici consentono di introdurre relazioni di equivalenza specifiche per i singoli scopi specifici. Tuttavia, nella loro essenza comune (quella di essere, appunto, relazioni di equivalenza), i concetti visti sinora sono la base fondazionale comune a tutte loro, e continuano a esser valide in tutte le situazioni. Come singola istanza, conosciuta sicuramente nella pratica ma non riconosciuta come tale, vediamo due singoli esempi, molto vicini tra loro.

Esempio 15.13. Sia $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ l'insieme dei numeri interi, privato del numero 0; formiamo il prodotto cartesiano $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, e su A introduciamo la seguente relazione: $\forall (a,b),(c,d) \in A$,

$$(a,b)\mathscr{R}(c,d) \; :\Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

La relazione $\mathscr{R}$ è una relazione di equivalenza (verificare per esercizio), e se $(a,b) \in A$ allora

$$[(a,b)]_{\mathscr{R}} = \{(ka,kb) \mid k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Infatti, se $k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow kb \neq 0$ (perchè nè k nè b è zero), e si ha $(ka,kb)\mathscr{R}(a,b)$ perchè $kab = kba$; ciò non solo ci dice che $\{(ka,kb) \mid k \in \mathbb{Z}^*\} \subseteq [(a,b)]_{\mathscr{R}}$, ma anche che possiamo supporre che $MCD(a,b) = 1$: se $MCD(a,b) = d \neq 1 \Rightarrow a = da'$, $b = db'$ per $a' = a/d$ e $b' = b/d$, e $(a',b')\mathscr{R}(a,b)$, cioè $[(a',b')]_{\mathscr{R}} = [(a,b)]_{\mathscr{R}}$, con $MCD(a',b') = 1$.

Resta da mostrare l'altra inclusione: sia allora $(x,y)\mathscr{R}(a,b)$; ciò vuol dire che $xb = ya$. Poichè $MCD(a,b) = 1$, e poichè xb è un multiplo intero di a (perchè ottenuto moltiplicando a per l'intero y), ciascun fattore primo che compare in a deve necessariamente comparire tra i fattori primi di x (o altrimenti $MCD(a,b) \neq 1$, contrariamente alle nostre ipotesi). In altri termini, x è un multiplo intero di a, e quindi esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = ka$. Una volta scoperto ciò, da $xb = ya$ segue $kab = ya$, cioè $a(kb - y) = 0$. Se $a = 0$ allora $x = 0$, e abbiamo finito; se $a \neq 0$ (il caso significativo), per la legge di annullamento del prodotto risulta $kb - y = 0$, cioè $y = kb$, e si scopre così che anche y è un multiplo secondo lo stesso intero k, però di b. In altri termini, $(x,y) = (ka,kb)$.

Da quando siamo piccoli, siamo abituati a usare un simbolo diverso per indicare la classe $[(a,b)]_{\mathscr{R}}$: precisamente, usiamo il simbolo $\frac{a}{b}$, e la chiamiamo frazione, o numero razionale. E' sempre questo il motivo per cui operiamo quella che chiamiamo *semplificazione di una frazione*, e scriviamo per esempio

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}:$$

le scritture sono differenti, ma si riferiscono NON alle coppie ordinate $(4,10)$ e $(2,5)$ rispettivamente, ma alle loro classi di $\mathscr{R}$-equivalenza: è corretto usare il simbolo di uguaglianza, $=$, perchè esso non si riferisce alle scritture, ma alle classi di equivalenza $[(4,10)]_{\mathscr{R}}$ e $[(2,5)]_{\mathscr{R}}$. Infatti, poichè $4 \cdot 5 = 20 = 10 \cdot 2 \Rightarrow (4,10)\mathscr{R}(2,5) \Rightarrow [(4,10)]_{\mathscr{R}} = [(5,2)]_{\mathscr{R}}$, che con il nuovo simbolo (quello di frazione) si scrive $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Il numero 2, che fa passare da $(2,5)$ a $(4,10)$, è precisamente il k della dimostrazione (o meglio, *un possibile* valore per il k della dimostrazione: -2 andrebbe ugualmente bene!). $\square$

Esempio 15.14. L'esempio precedente può essere ripreso quasi pari pari cambiando solo l'insieme di partenza: invece che partire dall'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi e formare il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, si può partire dall'insieme P dei polinomi e formare il prodotto cartesiano $P \times (P \setminus \{0\})$. Al posto delle *frazioni*, le classi di equivalenza ottenute si chiamano *frazioni algebriche*, ma per il resto nulla cambia.

16. Terminologia e consigli per lo studio

In un qualunque libro di Matematica, per facilitare il lettore a "navigare" tra i contenuti, si usa "sezionare" il testo in piccoli (beh, più o meno piccoli!) paragrafi classificati da un nome specifico a seconda del ruolo che svolgono all'interno del discorso espositivo. Vediamo una breve panoramica di questa "classificazione":

Definizioni: L'ossatura di qualunque discorso! Una definizione è l'introduzione di un concetto nuovo, specificando in modo non ambiguo e operativo cosa si intende con esso e, di solito, attribuendogli anche un nome. Normalmente, una definizione poggia su altri concetti introdotti precedentemente.

Dovrebbe esser del tutto evidente, perciò, che

(1) non conoscere nei dettagli una definizione vuol dire non essere in grado di comprendere quelle che sono le proprietà del concetto cui si riferisce, nè enunciati e problemi che lo coinvolgono,
(2) non è possibile studiare la Matematica procedendo "a salti", proprio perchè ogni nuovo concetto è costruito su definizioni e proprietà antecedenti.

Per fare un esempio,[8] consideriamo la seguente

Definizione 16.1. Si dice *campo* un anello non banale, commutativo con unità in cui ogni elemento non nullo è invertibile.

Questa è una definizione: introduce un nuovo concetto, quello di *campo*, costruendolo su concetti precedenti in modo non ambiguo e operativo (cioè, in base alla sola definizione, posso accorgermi che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi, mentre $\mathbb{Z}$ non lo è).

Non si può però comprendere cosa sia un *campo* se prima non si conoscono con esattezza i significati (le *definizioni*) dei termini *anello, anello non banale, anello commutativo, anello con unità, elemento non nullo di un anello, elemento invertibile di un anello con unità*.

Ovviamente, ciascuno di questi concetti è basato su altri concetti, per esempio

Definizione 16.2. Un *anello* è una terna ordinata $(A, +, \cdot)$ in cui A è un insieme non vuoto, $+$ e $\cdot$ sono operazioni binarie su A tali che

(1) $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
(2) l'operazione $\cdot$ è associativa;
(3) valgono entrambe le proprietà distributive di $\cdot$ rispetto $+$.

Chiarirsi queste cose procedendo *a ritroso* è molto faticoso, e l'alternativa di partire "imparando" direttamente la definizione di *campo* (*"memorizzando la definizione 9.1"* sarebbe l'espressione più adeguata) senza conoscere i termini in essa coinvolti dà una conoscenza illusoria: avrò, nel migliore dei casi, un'idea molto vaga di cosa sia un *campo*, magari basata su qualche esempio concreto; in realtà starò cominciando a costringere me stesso a uno studio mnemonico, vuoto e noioso, molto più faticoso del procedere a ritroso, i cui frutti saranno di brevissima durata.

Uno studio sano, invece,

- deve partire dal livello i cui concetti sono tutti conosciuti con precisione;
- un concetto si conosce con precisione solo se si sa dare di esso la definizione esatta (non solo un'approssimazione o un esempio);
- se dando una definizione si nota che uno dei termini coinvolti in essa non è chiaro (non si sa dare la relativa definizione), bisogna procedere a ritroso per colmare questo gap;
- solo dopo esser certi della padronanza dei concetti di un livello è possibile cominciare a studiare i concetti del livello successivo.

Nei corsi di Matematica dell'Università, il livello 0 è costituito dai contenuti della scuola secondaria (essenziali e irrinunciabili quelli del biennio); il livello 1 è costituito dallo studio della Logica e dell'Insiemistica (facce diverse della stessa medaglia). Per quanto detto, se un concetto di livello 1 dovesse mostrare che un concetto di livello 0 non è ben compreso (p.es.: non so risolvere una disequazione, non ho chiaro cosa si intenda con un *sistema di equazioni*, etc) è bene correre urgentemente a sanare questi gap. Molto spesso, comunque, l'apprendimento di un

[8] Ovviamente, non avete bisogno di conoscere o imparare ora il concetto di *campo*!

concetto di livello n aiuta a comprendere meglio, con più chiarezza e consapevolezza, i concetti di livello $n-1$.

Teorema, Proposizione, Lemma, Corollario, Osservazione: Fermo restando che le Definizioni sono il primo e indispensabile oggetto di studio per la comprensione di un argomento, bisogna poi capire il ruolo dei concetti da esse introdotti in un assegnato contesto (p.es.: Combinatoria, Aritmetica, Aritmetica Modulare, Algebra Lineare). Ciò avviene enunciando delle affermazioni che li coinvolgono. Ciascuno dei termini *Teorema, Proposizione, Lemma, Corollario, Osservazione* è precisamente questo; il fatto poi che portino nomi diversi serve solo per evidenziarne la rilevanza nel contesto. Sono, quindi, tutte affermazioni dello stesso tipo: una opportuna sequenza di quantificazioni, seguita da predicati

$$p \Rightarrow q \qquad \text{oppure, talvolta,} \qquad p \iff q.$$

In linea di principio,

- un *Teorema* è un risultato molto importante in assoluto: quando incontrerete il *Teorema di Eulero–Fermat*, già il fatto che sia classificato come *Teorema* vi suggerirà che è un risultato importante!
- Una *Proposizione* è un risultato notevole, molto spesso funzionale all'enunciazione di un risultato più importante (un *Teorema*), ma non limitato a ciò. Il fatto che si usi lo stesso nome (Proposizione) che abbiamo usato per indicare i mattoni del linguaggio matematico non è un caso: sono cose che hanno un senso diverso (e sono distinte dall'iniziale maiuscola), ma della stessa natura;
- un *Lemma* è una proposizione (lettera minuscola!) essenzialmente tecnica, funzionale a isolare parti di una dimostrazione (vedi dopo) di un risultato più importante (una *Proposizione* o un *Teorema*) per snellirla e renderla più immediata;
- un *Corollario* è un caso particolare e rilevante di un risultato più importante (un Teorema, una Proposizione o anche un Lemma): ne è conseguenza immediata, ma spesso a fini pratici risulta anche più utile del risultato che l'ha generato;
- un'*Osservazione*, infine, è precisamente quello che la parola dice: delle piccole osservazioni illuminanti su aspetti non ovvi di un risultato appena enunciato.

Il fatto che siano proposizioni, nel senso della logica, non le rende di per sè vere: *vanno dimostrate*.

Perciò, un Teorema, Proposizione, Lemma, Corollario, Osservazione, è costituito in genere da tre sezioni:

- l'ipotesi (la p);
- la tesi (la q);
- la dimostrazione.

Dimostrazioni: Con il termine *dimostrazione* si intende una sequenza di deduzioni (implicazioni) logiche, o di argomentazioni pertinenti, formalmente corretta, e che porta dal supporre che l'ipotesi sia vera al concludere che la tesi sia *necessariamente* vera.

Con ciò, sottolineiamo che stiamo dimostrando NON che la tesi sia vera, ma che l'implicazione (la proposizione composta!) $p \Rightarrow q$ è vera. Il fatto che basta supporre l'ipotesi vera e dedurre che la tesi è necessariamente vera per aver dimostrato che $p \Rightarrow q$ è vera è conseguenza del senso dell'implicazione logica: se p è falsa il valore logico di $p \Rightarrow q$ è T. Perciò solo il caso in cui p è vera deve essere testato.

Warning!!!: come già detto in precedenza, troppo spesso capita di veder confondere il termine *provare* con il termine *tentare*, perciò ripeto ancora una volta che in Matematica il termine *provare* è sinonimo di *dimostrare*.

Peggio ancora, troppo spesso si confonde il senso del termine *dimostrare* con il senso del termine *convincere*! Si tenga ben presente che in Matematica l'unica cosa che può *convincere* è una rigorosa e corretta catena di deduzioni logiche. Quindi usare, nel corso di una dimostrazione, argomentazioni del tipo *per forza deve*, o *per esempio*, o *è ovvio che*, o anche usare troppo *liberamente* le parole *quindi* (che esprime un'implicazione logica!) o *cioè* (che esprime un'equivalenza logica), deve far accendere un segnale d'allarme: se *per forza deve*, meglio spiegare il perchè, *un esempio* può servire solo per capire meglio cosa succede, ma *non basta* a dimostrare alcunchè, etc.

Esempi e controesempi: visto che li abbiamo citati, spieghiamo il ruolo che essi giocano in Matematica.

- Esempi: Enunciata una Definizione o una Proposizione che coinvolge un concetto astratto, dare degli esempi concreti che illustrino nel particolare delle considerazioni generali è un passo fondamentale per la piena comprensione della Definizione o della Proposizione. Senza di essi, la comprensione resta grandemente limitata. In breve: studiate bene tutti gli esempi che avete a disposizione, e createne magari degli altri;
- Controesempi: dato un concetto (Definizione, Teorema), è utile approfondire anche dei *controesempi*, cioè situazioni alle quali quel concetto NON si può applicare. Per esempio, data la definizione di gruppo (quale essa sia, non ci interessa al momento), e dopo aver visto qualche esempio concreto di gruppi, è (sarebbe) buona cosa vedere degli esempi di strutture che NON sono gruppi (per esempio, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, etc), studiare cioè dei controesempi. Fare ciò serve a capire meglio quali sono le qualità essenziali del concetto appena introdotto (nell'esempio, quello di gruppo), e cosa accade quando una di esse viene meno. In questo modo il concetto introdotto dalla Definizione verrà assimilato con maggiore chiarezza e dettaglio.

Uso dei controesempi nelle dimostrazioni: Capiamo bene una volta e per sempre che

- Per dimostrare che un'affermazione è vera, bisogna costruire rigorosamente una catena di deduzioni logiche che partono dalle ipotesi e arrivano alla tesi;
- Per dimostrare che un'affermazione è falsa basta invece fornire un controesempio: esso costituisce già, di per sè, una dimostrazione del fatto che $p \Rightarrow q$ è falsa, potendo esibire un caso in cui p è vera ma q è falsa.

Un controesempio famoso

Il famoso matematico Pierre de Fermat si accorse che i numeri

- $2^{2^0} + 1 = 3$,
- $2^{2^1} + 1 = 5$,
- $2^{2^2} + 1 = 17$,
- $2^{2^3} + 1 = 257$,
- $2^{2^4} + 1 = 65.537$

erano tutti numeri primi (perciò detti *primi di Fermat*) ed enunciò il

Teorema *$\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $2^{2^n} + 1$ è un numero primo.*

All'epoca, il rigore in Matematica era appena agli inizi, e lo scoprire un Teorema era in molti casi più una sfida verso gli altri Matematici che il raggiungimento di una verità assoluta e dimostrabile: *io dico che ho scoperto questo, e vi sfido a* *mostrare il contrario.* Chiaro che, in questo modo, molti dei “Teoremi” enunciati all’epoca non verrebbero chiamati così oggi (tutt’al più verrebbero catalogati tra le *congetture*).

Nel 1732, quasi cinquant’anni dopo, un altro grande matematico, Leonhard Euler, dimostrò che l’affermazione di Fermat è falsa. Lo fece così:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

Bastò cioè fornire un controesempio, per far cadere il “Teorema” (e “vincere” la sfida).