

ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

Informatica, Corso A-L, A. A. 2024-2025
Donatella Iacono
28 Ottobre 2024 ¹

Esercizio 1. Sia data la seguente proposizione

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad x = 2yc^2 + x - 3cy^2.$$

Stabilire se tale proposizione è vera o falsa e scriverne la negazione.

Esercizio 2. Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=-1}^n \left(\frac{7}{8}\right)^i = 8 \left(\frac{8}{7} - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right).$$

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti funzioni

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall c \in \mathbb{Q} \quad f(c) = 3c^4 + 1$$

e

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad h(s) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}s^3$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre determinare, ove possibile, le composizioni $f \circ h$ e $h \circ f$ e le funzioni inverse h^{-1} e f^{-1} .

Esercizio 4. Considerate tre proposizioni R , S e T , scrivere la tabella di verità di $(R \vee S) \rightarrow (T \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\exists z \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \exists a \in \mathbb{Q} \quad \text{si ha} \quad 3z - 2b + a = 0.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 5. Verificare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & a_{n-1} + 4(n+1) \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $b_n = 2n(n+3)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6. Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{4}{5} \sum_{i=-1}^n \left(\frac{4}{5}\right)^i = 5 - 4 \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 7. Date tre proposizioni T , Q e P , scrivere la tabella di verità di $(T \wedge Q) \vee (\bar{T} \vee P)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists s \in \mathbb{Z} \quad \text{ed} \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad 4c - t + 5s^2 = 0$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

¹Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.