ESERCIZI DI MATEMATCA DISCRETA

Informatica, Corso A-L, A. A. 2024-2025
Donatella Iacono
24 Ottobre 2024 [1]

Esercizio 1. Dimostrare che $\forall\ n \geq 0$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 2. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{4}.$$

Esercizio 3. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{3}{(2+i)}\frac{1}{(3+i)} = \frac{n+1}{n+4} + \frac{1}{2}.$$

Attenzione: nei seguenti esercizi la somma non inizia da zero ma il principio di induzione non cambia.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2+i)(3+i)} = \frac{n+1}{3(n+4)}.$$

Esercizio 5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1} 3i^3 = \frac{3}{4}\left((n+1)^2(n+2)^2 - 4\right).$$

Esercizio 6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1} (3i+1) = \frac{3}{2}\left((n+1)(n+2)\right) + n.$$

Esercizio 7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

[1] Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

Esercizio 8. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$\sum_{i=-2}^{n} 2i = n^2 + n - 6.$$

Esercizio 9. Ci sono 90 studenti, 35 sono donne, 20 hanno l'iphone, 15 donne hanno l'iphone. Si determini [2]

a) Quanti sono i maschi senza iphone.
b) Quanti sono i maschi con l'iphone.
c) Quanti sono gli studenti o maschi o con l'iphone.

Esercizio 10. Al primo anno di Informatica, sono iscritti 120 studenti. 40 studenti sono donne, 60 studenti sono biondi. 30 sono maschi biondi. Supponendo, per semplificare, che ci siano solo donne o uomini e solo mori o biondi, stabilire il numero di studentesse bionde, studentesse more e maschi mori. Studenti che sono donne o biondi.

Esercizio 11. Siano $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Determinare tutte le funzioni iniettive e biettive da A a B.

Esercizio 12. Dimostrare che $\forall\, k$, tale che $1 \leq k \leq n$, si ha $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

[2] Solo per semplificare l'esercizio, supponiamo che ci siano solo donne e uomini