

ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

Informatica, Corso A-L, A. A. 2024-2025
Donatella Iacono
2 Dicembre 2024 ¹

Esercizio 1. Si consideri su \mathbb{Z} la seguente relazione

$$\mathcal{R} = \{(y, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5 \mid d - y\},$$

ovvero $\forall y, d \in \mathbb{Z} \quad y \mathcal{R} d$ se e soltanto se $5 \mid d - y \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, tale che $d - y = 5k$. Determinare se \mathcal{R} è una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza. Se di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, la seguente equazione diofantea e determinare tutte le soluzioni.

$$136x + 312y = 16.$$

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti congruenze sono vere o false

$$16^{43} \equiv 1 \pmod{49}, \quad 32^{25} \equiv 32 \pmod{45}.$$

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 10x \equiv 50 & (\text{mod } 70) \\ 11x \equiv 22 & (\text{mod } 66) \\ 131x \equiv 132 & (\text{mod } 13). \end{cases}$$

Esercizio 5. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $*$: $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (x, y), (c, s) \in A \quad (x, y) * (c, s) = \left(\frac{1}{3}xc, \frac{2}{3} + s + y\right).$$

- (1) Determinare se l'operazione è associativa.
- (2) Determinare se l'operazione è commutativa.
- (3) Se esiste, determinare l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
- (4) Se esistono, determinare tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

¹Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.