

## ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

Informatica, Corso A-L, A. A. 2024-2025  
Donatella Iacono  
2 Dicembre 2024 <sup>1</sup>

**Esercizio 1.** Si definisca sull'insieme  $\mathbb{Z}$  la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = xy + x.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Descrivere, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 2.** Si definisca sull'insieme  $\mathbb{Z}$  la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = 2xy + x + y.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Descrivere, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 3.** Sia assegnata sull'insieme  $\mathbb{Z}$  la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = 4xy - 5x.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Determinare, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 4.** Sia assegnata sull'insieme  $\mathbb{Z}$ , la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , tale che

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a * b = ab - a - b + 3.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Determinare, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 5.** Sia assegnata sull'insieme  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la seguente operazione  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (x, y), (z, t) \in A \quad (x, y) + (z, t) = (x + z, y + t).$$

---

<sup>1</sup>Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Descrivere, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 6.** Sia assegnata sull'insieme  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , la seguente operazione  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (a, x), (t, z) \in A \quad (a, x) * (t, z) = (3at, x + 2 + z).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Se esistono, determinare tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 7.** Sia assegnata sull'insieme  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la seguente operazione  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (a, x), (t, z) \in A \quad (a, x) * (t, z) = (t + a, 2xz).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (3) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (4) Se esistono, determinare tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 8.** Sia assegnata sull'insieme  $\mathbb{Q}$  la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x * y = -xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Se esistono, descrivere tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 9.** Sia assegnata sull'insieme  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la seguente operazione  $\cdot$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (x, y), (z, t) \in A \quad (x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Se esistono, determinare tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 10.** Sia assegnata sull'insieme  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , la seguente operazione  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (x, y), (z, t) \in A \quad (x, y) * (z, t) = (x + z, yt).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono, tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

**Esercizio 11.** Si consideri sull'insieme  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  la seguente operazione  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (s, r), (x, y) \in A \quad (s, r) * (x, y) = (2sx, r + y).$$

- (1) Determinare se l'operazione è associativa.
- (2) Determinare se l'operazione è commutativa.
- (3) Se esiste, determinare l'elemento neutro della struttura algebrica  $(A, *)$ .
- (4) Se esistono, determinare tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.